

Capítulo 3

Lentes esféricas

B. Doménech, C. Hernández, C. Illueca, M.M. Seguí

3.1 Superficies ópticas esféricas

La mayoría de las superficies que se emplean en óptica oftálmica son superficies de revolución engendradas por la rotación de una línea curva alrededor de un eje contenido en su plano.

Las superficies esféricas se generan por la rotación de un arco de circunferencia alrededor de un eje de revolución que pasa por el centro de curvatura, tal y como muestra la figura 3.1 donde AR representa el arco generador, xx' el eje de revolución y C el centro de curvatura de la superficie esférica. La intersección con la superficie de cualquier plano es una sección circular; la mayor circunferencia se obtiene cuando se secciona por un plano que contiene el centro de curvatura.

En el caso particular en que el centro de curvatura está en el infinito, la curvatura de la superficie es cero y la superficie es una superficie plana. Las lentes esféricas están constituidas por dos superficies esféricas o por una superficie plana y otra esférica. De la combinación de estas dos superficies se obtienen los distintos tipos o formas de lentes (figura 3.2); para una misma potencia (en eje) las formas posibles son infinitas, aunque en la actualidad, los criterios de diseño imponen lentes en forma de menisco y con una cierta curvatura para optimizar la calidad óptica de las lentes.

Las superficies esféricas son las más sencillas de estudiar ya que presentan equivalencia en todos sus meridianos; por lo que, tanto sus propiedades geométricas como ópticas son constantes en todas las secciones de la superficie.

La figura 3.3 representa una superficie esférica convexa de índice de refracción n y radio r sobre la cual inciden 3 rayos. El primer rayo incide perpendicular a la superficie y no se desvía. El rayo 2 incide formando un ángulo i_2 con la normal a la superficie y es refractado por la superficie, por lo que se acerca a la normal y forma con la misma un ángulo i'_2 . Análogamente, el rayo 3 inci-

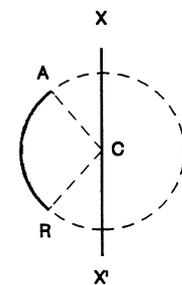


Fig. 3.1 Generación de una superficie esférica

55

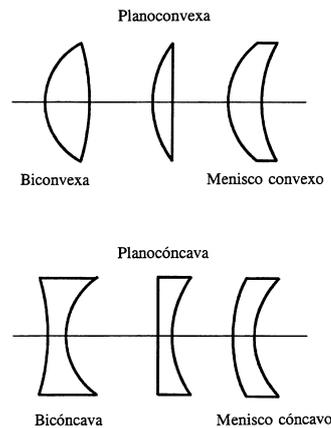


Fig. 3.2 Diferentes formas de lentes esféricas

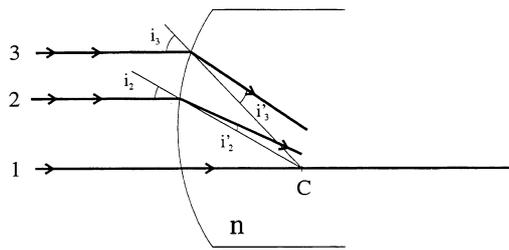


Fig. 3.3 Refracción a través de una superficie esférica convexa

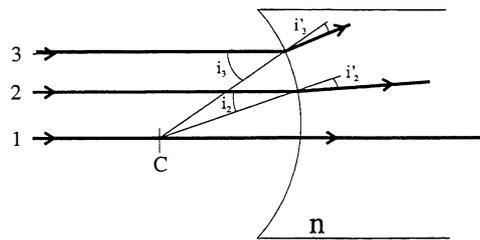


Fig. 3.4 Refracción a través de una superficie esférica cóncava

de con un ángulo i_3 y se refracta con un ángulo i'_3 . En aproximación paraxial, todos los rayos refractados convergerán en el mismo punto del eje, el foco imagen F' de la superficie. Así pues, una superficie convexa o positiva tiene un efecto convergente en la luz incidente siempre que el índice de refracción de la misma sea superior al del medio que le precede.

De la misma forma, la figura 3.4 representa el comportamiento de una superficie esférica cóncava, de radio r e índice de refracción n . Si el índice del material es superior al del medio que le precede, la superficie cóncava o negativa tendrá un efecto divergente en la luz incidente.

La capacidad de una superficie para alterar la vergencia de la luz incidente se denomina *potencia de una superficie*. Dada una superficie de radio r que separa dos medios de índices n y n' , la potencia de la superficie viene dada por la expresión:

$$P = \frac{n' - n}{r} \tag{3.1}$$

56

Se toma por convenio r positivo si el centro de curvatura de la superficie se encuentra a la derecha de la misma. Sustituyendo r en metros la potencia P se obtendrá en dioptrías (D).

Para el caso de una lente en material de índice n en aire denotaremos por P_1 y P_2 a las potencias de la primera y segunda cara respectivamente, cuyas expresiones serán:

$$P_1 = \frac{n-1}{r_1}; \quad P_2 = \frac{1-n}{r_2} \tag{3.2}$$

3.2 Curvatura

La curvatura (R) de una superficie es la inversa de su radio de curvatura. Si r viene expresado en metros, R se puede expresar en dioptrías o en m^{-1} , empleándose generalmente ésta última y reservando la dioptría para referirnos a la potencia de la superficie. Así, una superficie de radio 1 m presenta una curvatura de $1 m^{-1}$, para $r = 0.5$ m la curvatura (R) será $2 m^{-1}$, y así sucesivamente.

$$R = \frac{1}{r} \tag{3.3}$$

En óptica oftálmica, es frecuente evaluar la curvatura de una superficie mediante el empleo de la sagita o flecha de la superficie (figura 3.5).

En la figura 3.5 se muestra una superficie esférica de centro C y radio de curvatura r . La sagita s es la distancia entre el punto medio de la cuerda AB y el polo del casquete esférico P .

La base horizontal (cuerda AB) corresponde al diámetro ($\phi = 2x$) de una lente planoconvexa ABP, con un espesor de borde a filo ($E_b = 0$).

Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 3.5 se puede deducir el valor de la sagita.

$$r^2 = (r-s)^2 + x^2 \quad (3.4)$$

$$r-s = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad (3.5)$$

$$s = r \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad (3.6)$$

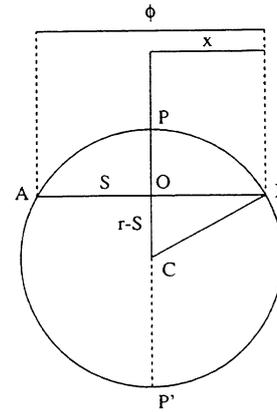


Fig. 3.5 Sagita de una superficie esférica

donde

$$r + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (3.7)$$

representa la distancia desde O hasta el punto diametralmente opuesto a P, es decir, $OP' = 2r - s$, por lo que, en la práctica, la expresión que se utiliza para el cálculo de la sagita (OP) es:

$$s = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad (3.8)$$

57

Desarrollando en serie la expresión de la sagita, se obtiene:

$$s = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \frac{x^6}{16r^5} + \dots \quad (3.9)$$

Cuando x es pequeño en relación a r (lo cual es bastante frecuente en el caso de lentes oftálmicas) se pueden despreciar todos los términos de la serie excepto el primero; para la sagita se obtiene la fórmula aproximada:

$$s = \frac{x^2}{2r} = \frac{\phi^2}{8r} \quad (3.10)$$

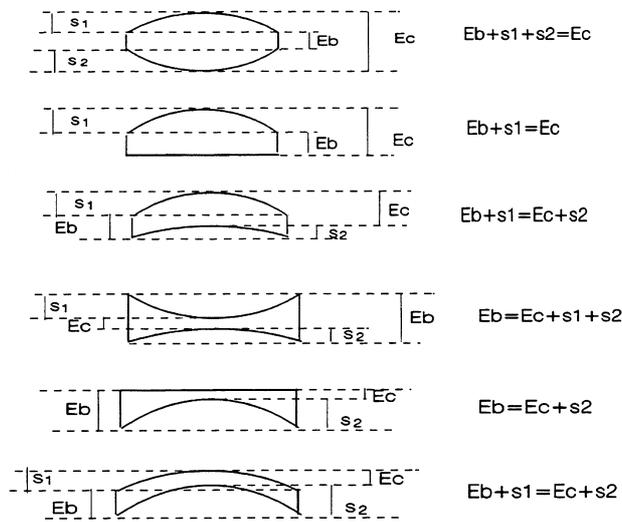
más conocida como aproximación de Rayleigh, válida únicamente para diámetros de lente no muy grandes y radios de curvatura grandes, es decir, para valores de s pequeños en relación a r .

3.3 Espesor y peso

El espesor de una lente es de gran importancia en óptica oftálmica y la mayoría de las veces es un factor determinante en la selección de un material para la compensación visual.

Aunque desde el punto de vista estético cualquier lente debería ser lo más delgada posible hay que tener en cuenta que el montaje de las lentes en la montura debe ser posible; así, hay que considerar dónde se halla el espesor mínimo de las lentes en bruto que corresponderá al espesor de borde en lentes positivas y al espesor de centro en lentes negativas. A partir de este espesor menor de la lente, de las curvaturas de las superficies de la lente, del índice de refracción y del diámetro de la misma se puede deducir el espesor de centro de una lente positiva y el de borde de una lente negativa, ambos espesores máximos de la lente.

A partir de una cierta potencia, es importante conocer el espesor máximo de una lente: una lente positiva con un espesor de centro mayor del necesario es una lente muy pesada. Para relacionar los espesores de borde y centro de cualquier lente esférica, es necesario calcular previamente las sagitas de las dos superficies de la lente considerando como cuerda el diámetro total de la misma (ϕ). La figura 3.6 muestra los distintos casos que se pueden presentar, tanto con lentes positivas como con lentes negativas.



58

Fig. 3.6 Relaciones de espesor en lentes esféricas

Directamente relacionado con los espesores está el peso de una lente oftálmica, cuyo cálculo es de gran interés, ya que puede en un momento dado ser un factor que determine el tipo de material con el que se lleve a cabo la compensación. El peso de una lente oftálmica viene dado por el producto de la densidad del material y el volumen que la lente ocupa (11).

$$P = \delta \cdot V \quad (3.11)$$

El volumen que ocupa una lente esférica (figura 3.7) de diámetro ϕ limitada por dos dioptros esféricos de radios r_1 y r_2 y con espesores de centro y borde E_c , E_b respectivamente, viene dado por la expresión:

$$V = V_1 - V_2 + V_{Eb} \quad (3.12)$$

donde V_1 es el volumen que ocupa el casquete esférico de radio r_1 y sagita s_1 para un diámetro ϕ , V_2 el volumen del casquete esférico de radio r_2 y sagita s_2 para el mismo diámetro y V_{Eb} el volumen del cilindro de altura E_b y base igual a ϕ . El volumen de un casquete esférico de flecha s viene dado por:

$$V = \frac{1}{3} \pi s^2 (3r - s) \quad (3.13)$$

mientras que el volumen del cilindro de altura E_b , cuya base es ϕ , se obtiene de la expresión:

$$V_{Eb} = \pi (\phi/2)^2 E_b \quad (3.14)$$

de donde el volumen final de una lente oftálmica esférica tendrá por fórmula:

$$V = \pi \left[(r_1 s_1^2 - r_2 s_2^2) - \frac{1}{3} (s_1^3 - s_2^3) \right] + \frac{1}{4} \pi \phi^2 E_b \quad (3.15)$$

Si sustituimos el valor de la sagita y fijamos el diámetro y el espesor de borde, el volumen de la lente sólo dependerá de los valores de r_1 y r_2 que, a su vez, son función del índice de refracción del material. Para una determinada potencia de superficie, a medida que el índice de refracción aumenta la curvatura disminuye; es decir, el radio de curvatura aumenta, pero al mismo tiempo disminuyen las sagitas y el espesor con lo que, en conjunto, el volumen de la lente será menor.

Por otra parte, en este razonamiento no debemos olvidar las características de los materiales que comúnmente se emplean en óptica oftálmica, especialmente la densidad de los mismos.

Así, la densidad de los vidrios minerales es del orden de dos veces la de los materiales orgánicos. Además, para los vidrios minerales, a medida que el índice de refracción aumenta (y según el razonamiento anterior el volumen disminuye) también aumenta la densidad, por lo que no es evidente que exista una reducción de peso al aumentar el índice de refracción.

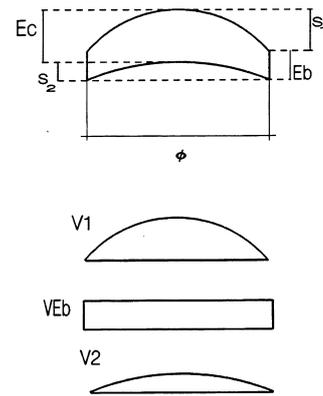


Fig. 3.7 Cálculo del volumen de una lente esférica

3.4 Concepto y tipos de potencia en lentes esféricas

El cambio de vergencia que experimenta la luz cuando atraviesa una lente se cuantifica por medio de la potencia de la misma, expresada normalmente en dioptrías (D). Originalmente la dioptría se define como la potencia de una lente (figura 3.8) cuya distancia focal es de 1 m (si no se especifica lo contrario nos referimos al caso de lente en aire ya que es el caso habitual en óptica oftálmica). De esta forma, si se considera la lente delgada y se conoce su potencia en dioptrías, basta con calcular la inversa para conocer la posición del foco imagen de la misma tomando como origen la propia lente.

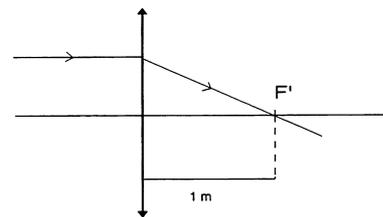


Fig. 3.8 Concepto de dioptría

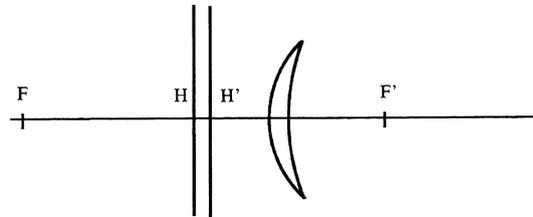
En el caso de las lentes compensadoras, hay que tener en cuenta que, en general, no podemos considerarlas delgadas por lo que habrá que precisar el origen desde el que se mide la posición del foco imagen.

Para que un ojo amétrope vea un objeto lejano nítidamente sin acomodar, es necesario que la imagen de ese objeto dada por la lente se forme en su punto remoto, por lo que el foco imagen de la lente debe coincidir con dicho punto remoto, constituyendo esto el principio de la compensación de ametropías.

Según este principio, es imprescindible conocer la posición del foco imagen de la lente así como el origen desde el cual se mide dicha posición; para una misma lente, elegir un origen u otro conlleva un cambio en el valor de la potencia. Vamos a analizar a continuación los distintos tipos de potencia.

Potencia verdadera

Dada una lente sumergida en aire, de material de índice n (figura 3.9), formada por dos dioptrios esféricos de radios r_1 y r_2 separados un espesor e , la potencia verdadera de la lente P_v (también conocida como potencia cardinal o de Gauss) se define como:



$$P_v = \frac{1}{H'F'} = -\frac{1}{HF} \quad (3.16)$$

y se relaciona con las potencias de las caras de la lente P_1 y P_2 según la expresión:

$$P_v = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 \quad (3.17)$$

Fig. 3.9 Posición de los planos principales en una lente gruesa

donde n es el índice de refracción de la lente, y e el espesor de centro de la misma, y además:

$$P_1 = \frac{n-1}{r_1} \quad (3.18)$$

$$P_2 = \frac{1-n}{r_2} \quad (3.19)$$

60

En el caso de una lente suficientemente delgada sumergida en aire, como los planos principales se confunden con la lente, el empleo de P_v es bastante correcto. Sin embargo, para una lente gruesa, la potencia verdadera no es suficiente para situar el foco imagen de la lente ya que la posición del plano principal imagen de la lente es desconocida; dicha posición depende de la forma de la lente y, en consecuencia, sería necesario calcularla previamente para situar el foco imagen de la lente.

Potencia frontal o potencia de vértice posterior

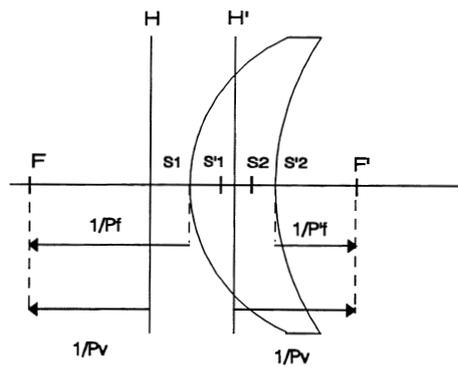


Fig. 3.10 Posición de los diferentes orígenes en una lente gruesa

Hemos visto que el empleo de P_v representa un inconveniente ya que el origen H' desde el que se mide la posición de F' es a priori desconocido. Por este motivo cuando se trabaja con lentes oftálmicas se fija la posición de los focos objeto e imagen de la misma respecto a un punto físico concreto, normalmente uno de los vértices de la lente. Consideremos la lente compensadora en aire que muestra la figura 3.10. H y H' son los planos principales objeto e imagen, F y F' los focos objeto e imagen, S_1 es el vértice anterior y S_2 el vértice posterior de la lente de potencia verdadera P_v .

Por analogía con la potencia verdadera, definimos dos potencias frontales, la potencia de vértice anterior, P_{VA} :

$$P_{VA} = -\frac{1}{S_1F} \quad (3.20)$$

donde S_1F se conoce con el nombre de segmento focal anterior, y la potencia de vértice posterior P_{VP} :

$$P_{VP} = \frac{1}{S_2F'} \quad (3.21)$$

donde S_2F' es el segmento focal posterior.

Esta última es la más empleada ya que de esta forma queda determinada la posición del foco imagen de la lente sin ninguna ambigüedad y se obtiene una referencia válida para satisfacer el principio de la compensación. Ahora bien, desde el punto de vista teórico, se definen cuatro potencias frontales, dos anteriores y dos posteriores. Así, la potencia de vértice anterior definida ($P_{VA} = -1/S_1F$), en realidad, se denomina potencia frontal anterior objeto. La ventaja de la teoría de las notaciones frontales consiste en tomar orígenes conjugados para las distancias objeto e imagen. De esta forma, se define también una potencia frontal anterior imagen, P'_{FA} ,

$$P'_{FA} = \frac{1}{S'_1F'} \quad (3.22)$$

donde S'_1 es el conjugado del vértice anterior S_1 a través de la lente.

Análogamente, la potencia de vértice posterior definida ($P_{VP} = 1/S_2F'$) corresponde en realidad a la potencia frontal posterior imagen, y se define la potencia frontal posterior objeto P_{FP} como:

$$P_{FP} = -\frac{1}{S_2F} \quad (3.23)$$

donde S_2 y S'_2 son puntos conjugados a través de la lente.

Ahora bien, si la ventaja del empleo de la potencia de vértice frente a la potencia verdadera es precisamente el uso de orígenes concretos y puesto que sólo S_1 y S'_2 están materializados en la lente, en la práctica sólo se emplean la potencia frontal anterior objeto (potencia de vértice anterior) y la potencia frontal posterior imagen (potencia de vértice posterior), es decir las dos primeras que se han definido. Si además tenemos en cuenta que en la compensación visual es necesario conocer la posición de F' , en la práctica la que se utiliza de forma habitual es la potencia de vértice posterior y a ella nos referimos cuando hablamos de potencia frontal posterior o simplemente potencia frontal. La potencia de vértice posterior de una lente en aire se expresa también en dioptrías como la inversa en metros del segmento focal posterior. Así, si la potencia verdadera de una lente es 1 D, su distancia focal imagen $H'F'$ es 1 m, mientras que si P_{VP} es 1 D, es el segmento S'_2F' el que tiene longitud 1 m.

En óptica oftálmica, es habitual encontrar diferencias significativas entre los valores de potencia verdadera y frontal, fundamentalmente para valores medios y altos de la potencia.

Ecuaciones de Gauss en notación frontal

En la definición de las dos potencias frontales posteriores (objeto e imagen), se ha tomado como origen de imágenes (en particular como origen de la posición de F') el vértice posterior de la lente, y como origen de objetos el conjugado de S'_2 , (denotado por S_2) a través de la lente.

Las ecuaciones de Gauss generalizadas a orígenes frontales se muestran en la siguiente tabla, donde x y x' representan las distancias al objeto y a la imagen respectivamente medidas desde S_2 y S'_2 , P_{VP} es la potencia de vértice posterior, P_V la potencia verdadera y g' el factor frontal posterior de la lente o factor de forma, que relaciona potencia de vértice posterior con verdadera. El factor de forma de la lente es el inverso del aumento transversal entre los orígenes posteriores.

$$\frac{1}{x'} = \frac{g'^2}{x} + P_{VP} \quad (3.24)$$

$$\frac{y'}{y} = g' \frac{x'}{x} \quad (3.25)$$

$$P_{VP} = g' P_V \quad (3.26)$$

$$g' = \frac{1}{\beta (S_2 S'_2)} \quad (3.27)$$

62

Esta notación es ventajosa ya que, si en vez de elegir como orígenes S_2 y S'_2 , tomamos otra pareja de puntos conjugados O y O' podemos seguir usando estas expresiones teniendo en cuenta que x representaría la distancia al objeto medida desde O , x' la distancia a la imagen medida desde O' , g' sería la inversa del aumento transversal entre O y O' a través de la lente y P'_F debe ser sustituida por P'_O , donde P'_O es la potencia medida desde O' , es decir:

$$P'_O = \frac{1}{O'F'} \quad (3.28)$$

Por ejemplo, cuando los orígenes son los planos principales H y H' , entonces $g'=1$, $x=a$, $x'=a'$, $P'_F = P_V$, y se obtendrían las fórmulas clásicas de formación de imagen:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + P_V \quad (3.29)$$

Potencia de vértice posterior en función de las potencias de las caras

La imagen de un punto en el infinito a través de la primera cara de la lente se forma a una distancia n/P_1 de la misma, es decir, a una distancia $a=(n/P_1-e_c)$ de la segunda cara, que a su vez formará la imagen a una distancia a' , dada por la expresión:

$$\frac{1}{a'} = \frac{n}{a} + P_2 = \frac{nP_1}{n - e_c P_1} + P_2 \quad (3.30)$$

donde justamente $1/a' = P_{VP}$, puesto que a' es la distancia a la que focaliza un haz paralelo al eje, medida desde el vértice posterior de la lente.

$$\frac{1}{a'} = P_{VP} = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} + P_2 = \frac{P_1 + P_2 - \frac{e_c}{n} P_1 P_2}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} = \frac{P_V}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} \quad (3.31)$$

Como $P_{VP} = g' P_V$, de la ecuación anterior se deduce:

$$g' = \frac{1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} \quad (3.32)$$

Por tanto, la expresión que relaciona la potencia frontal posterior y las potencias de las caras es:

$$P_{VP} = g' P_1 + P_2 = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} + P_2 \quad (3.33)$$

Hay que tener en cuenta que las expresiones obtenidas en este apartado son válidas únicamente para el caso de la potencia frontal posterior imagen.

Medida de potencias frontales: frontofocómetro

La técnica de medida de focales de los sistemas ópticos recibe el nombre de focometría. Un método muy antiguo empleado con este fin a partir del siglo XVIII en la óptica de compensación es la neutralización. Se trata de buscar una lente en la «caja de pruebas» que pegada a la que se quiere medir, neutralice su efecto óptico. Las dos lentes colocadas en contacto, con sus ejes ópticos confundidos, deben comportarse como una lámina plano-paralela. En general, se dice que la neutralización se obtiene cuando el foco imagen de la primera lente coincide con el foco objeto de la segunda, porque un rayo paralelo al eje que incide sobre el conjunto no sufrirá desviación. Sin embargo, el sistema afocal obtenido no presenta aumento unidad, por lo que la imagen se verá afectada. Debido a esto la práctica de la neutralización resulta ser una técnica poco fiable. Desde principios de siglo hasta nuestros días la neutralización ha sido sustituida por el empleo generalizado del frontofocómetro, instrumento que sirve para medir directamente la potencia frontal posterior de las lentes.

El fundamento óptico de un frontofocómetro se basa principalmente en un sistema colimador y en un anteojo como sistema de observación. En la figura 3.11 se representan las distintas partes que lo componen. Como se puede observar, en su forma más simple es un sistema óptico centrado que consta de los siguientes elementos: fuente de iluminación (S), lente condensadora, test (T), lente colimadora (C), soporte o concha de apoyo, objetivo (Obj), ocular (Oc) y retículo (R).

La función de la lente colimadora es formar la imagen del test iluminado T, para que, por medio de un anteojo enfocado al infinito, un sujeto emélope pueda observar simultáneamente el test y el retículo sin necesidad de acomodar. Para ello el test se encuentra originalmente sobre el foco objeto de la lente colimadora, así la lente forma la imagen del test en el infinito. A su vez, para que el anteojo esté enfocado al infinito, es decir, forme un sistema afocal, el foco imagen del objetivo debe coincidir con

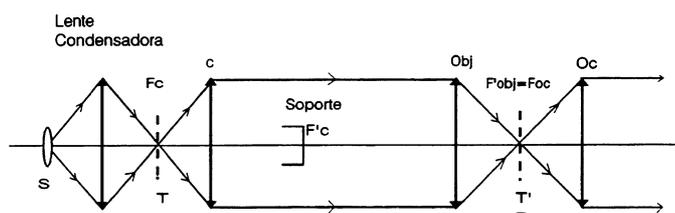


Fig. 3.11 Disposición de los distintos elementos en un frontofocómetro

el foco objeto del ocular. De esta manera, el haz de rayos paralelos, en ausencia de lente problema, llega al antejo incidiendo sobre el objetivo, el cual forma una segunda imagen nítida del test sobre su foco imagen y la imagen final dada por el ocular se forma en el infinito. Para asegurar el enfoque correc-

to del instrumento, el retículo se sitúa también en el foco imagen del objetivo.

Por lo tanto, cuando un observador emétrope mira a través del ocular en estas condiciones, consigue ver nítidamente la imagen del test y el retículo. Se dice entonces que el instrumento está calibrado a cero, ya que la escala dióptrica que nos da la lectura de la potencia frontal debe marcar en ese momento cero dioptrías.

Si se coloca una lente problema de potencia desconocida sobre el soporte en forma de concha para realizar la medida, éste está diseñado de modo que el vértice posterior de la lente problema coincida con el foco imagen de la colimadora (figura 3.12). Al observar entonces por el antejo será imposible ver nítidamente la imagen del test si éste sigue situado en el foco objeto de la colimadora, por lo que el observador deberá desplazar el test de su posición inicial girando la rueda de enfoque, para ver nuevamente su imagen con nitidez. En ese momento la escala dióptrica indicará la lectura de la potencia frontal que tiene la lente desconocida.

64

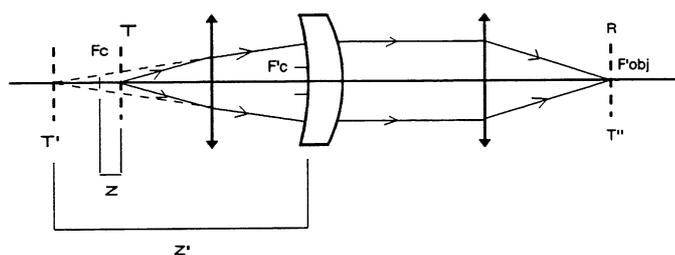


Fig. 3.12 Principio del frontofocómetro. Formación de las imágenes intermedias al medir una lente

Cuando el frontofocómetro está bien ajustado se cumple la relación de Newton:

$$zz' = -f'_{col}{}^2 \quad (3.34)$$

donde z representa la distancia del foco objeto de la lente colimadora al test y z' la distancia del foco imagen a la imagen del test. Para que se vea nítidamen-

te la imagen del test a través del antejo de observación del frontofocómetro, la imagen a través de la lente que se mide debe estar en el infinito. Por lo tanto, la distancia z' será la distancia desde el foco objeto de la lente problema al vértice de la superficie cóncava.

Como la lente problema está situada en el frontofocómetro al revés de como será usada posteriormente, la potencia frontal de la lente problema será $P'_f = -1/z'$, de donde:

$$z = f'_{col}{}^2 P'_f \quad (3.35)$$

El desplazamiento z resulta ser directamente proporcional en dioptrías a la potencia frontal P_{vp} de la lente que se quiere medir y a un parámetro constructivo del instrumento que es la distancia focal imagen de la colimadora, f'_{col} .

Los frontofocómetros convencionales están constituidos por las siguientes partes: una fuente de iluminación, un test móvil, un sistema de colimación, un sistema de observación y diversos accesorios. Las tres primeras partes antes indicadas forman el sistema de enfoque del instrumento, mientras que un anteojo enfocado al infinito con un retículo incorporado forman en conjunto el sistema de observación.

La fuente de iluminación posee un filamento bastante extenso, ya que debe ser de gran tamaño para que el retículo se presente uniformemente iluminado. A una cierta distancia de la fuente se coloca un filtro rojo-verde, que determina el color del test, cuya posición viene determinada por un mecanismo que permite interponer uno de los dos filtros en el trayecto óptico. En el uso normal para lentes incolores y de tinte ligero, el filtro verde debe estar en su puesto, mientras que para medir lentes coloreadas de mayor absorción, la coloración del rojo o el verde es opcional, en función del mejor reconocimiento de la imagen del test.

El test adopta formas diversas, pero generalmente tiene forma de cruz, y va inmerso en una pieza que se puede desplazar. Como podemos observar en la figura 3.13, el tipo más utilizado consta de un círculo de pequeños puntos y una serie de líneas cruzadas que se pueden rotar. Este sistema va acoplado al engranaje de otro dispositivo que lleva una escala en la que se registran las dioptrías equivalentes al movimiento del test. El observador tendrá una visión nítida del test y una lectura de la potencia frontal de la lente problema. A continuación se sitúa la concha de apoyo o soporte de la lente cuya potencia se va a determinar, de forma que al apoyar la lente por su superficie cóncava el vértice coincida con el foco imagen de la colimadora (que es un sistema convergente cuya potencia normalmente oscila entre +22 y +27 D).

El sistema de observación es un anteojo formado por un objetivo acromático y un ocular, que está montado sobre un mecanismo de enfoque tipo tornillo, con una escala que abarca normalmente entre + 5,00 D y - 5,00 D, para compensar las distintas ametropías.

El anteojo lleva un retículo (figura 3.14) en el foco imagen del objetivo, que consta de dos partes, una fija y otra giratoria. La parte fija del retículo está formada por una escala graduada según el sistema TABO, con divisiones de 1°, así como también por tres o más círculos concéntricos que marcan saltos de una dioptría prismática. La parte giratoria está formada por una cruz que ayuda a determinar la orientación de los meridianos principales en el caso de lentes astigmáticas.

Como accesorios se pueden considerar tanto el dispositivo de marcaje, como el compensador de prismas que permite realizar y medir efectos prismáticos. El sistema marcador está compuesto por tres puntas alineadas cuyos extremos se impregnan de tinta y que sirve para marcar el centro óptico de una lente, o el punto con el efecto prismático buscado, como en el caso de lentes astigmáticas la línea horizontal que fija la orientación de la lente.

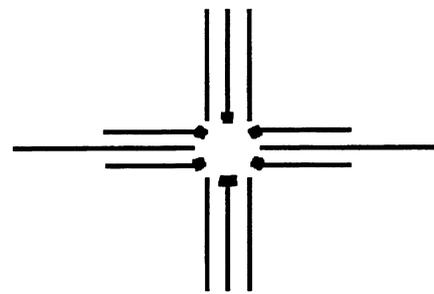


Fig. 3.13 Test en forma de cruz

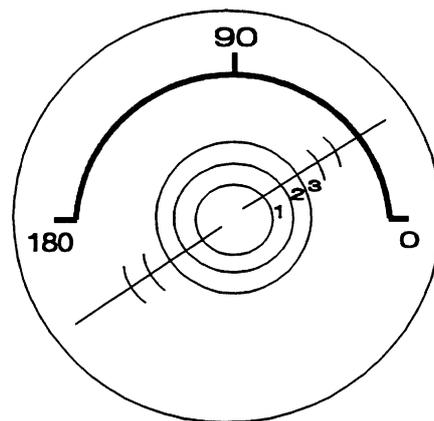


Fig. 3.14 Retículo

Debe considerarse que para que la imagen del test dada por el ocular sea vista con nitidez por el observador, es necesario que la misma se forme en el punto remoto de aquél, es decir, en el infinito si el ojo es emétrope, a una distancia finita por delante del ojo si éste es miope y por detrás del ojo si se trata de un hipermétrope.

De esta forma, y como se ha descrito anteriormente, un observador emétrope podrá ver la imagen del test nítida sin esfuerzo acomodativo cuando el foco objeto del ocular coincida con el foco imagen del objetivo.

Sin embargo, un miope tendrá que desplazar el ocular acercándolo al objetivo hasta que consiga enfocar el test sobre el retículo y un hipermétrope por el contrario deberá alejar el ocular del objetivo si quiere ver el test con nitidez. Para comprobar que el frontofocómetro está bien ajustado, basta enfocar el test sin colocar ninguna lente, con lo que debe aparecer la imagen del test centrada en el retículo, que debe verse nítidamente, y la escala de potencias debe marcar cero. Si esto no ocurre así debe verificarse el ajuste del ocular.

Es imprescindible, por tanto, que antes de comenzar a medir con el frontofocómetro cada observador realice el ajuste correspondiente del sistema de observación para que las lecturas obtenidas sean las correctas.

Cuando el frontofocómetro está calibrado a cero el test coincide con el foco objeto de la lente colimadora; posteriormente, al introducir una lente problema, un desplazamiento del test a derecha o izquierda de su posición original permitirá enfocarlo de nuevo y obtener la lectura de la potencia frontal de dicha lente.

El límite superior de medición de las potencias frontales viene dado por la menor distancia con respecto a la lente problema a la que se puede formar la imagen del test dada por la colimadora. Dicha distancia nos da la situación de su foco objeto que se ha definido como:

$$z' = -\frac{1}{P_{vp}} \quad (3.36)$$

de donde se deduce que cuanto menor sea z' mayor será la potencia frontal que se pueda medir.

Si la lente que se desea medir es negativa, el desplazamiento del test «z» será siempre negativo, y se alejará de la colimadora, ya que sólo de esta forma la imagen del test dada por la misma se sitúa a una distancia superior a la focal de la colimadora ($z' > 0$). Por ello, el límite real para las potencias negativas es el infinito. Ahora bien, si hay una limitación física dada por las dimensiones del instrumento, se suele imponer el mismo límite que para las potencias positivas.

En el caso que la lente problema sea positiva, el desplazamiento del test «z» será por el contrario positivo, y se acercará a la colimadora, para que $z' < 0$, de manera que la menor distancia con respecto a la lente problema a la cual se obtiene la imagen del test T' es justamente la focal imagen de la colimadora ($z' = -f'_{col}$), por lo que generalmente el límite de medición para las lentes positivas es del orden de 20 a 25 D, que suele ser la potencia de la lente colimadora.

En cuanto a la medida de lentes esféricas, y dado que éstas presentan los mismos radios de curvatura en cualquiera de sus secciones o meridianos, solamente se necesita de un enfoque para determinar su potencia. Como consecuencia, cuando medimos este tipo de lente, la imagen del test a través del frontofocómetro es semejante a la obtenida cuando se enfoca sin lente problema, con la única diferencia el aumento de esta imagen, que está en función de la potencia de la lente medida.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el primer paso consiste en calibrar el ocular para ajustarlo al estado refractivo del observador que va a realizar las medidas. Posteriormente, se coloca la lente esférica objeto de nuestro estudio, apoyándola sobre el soporte por su superficie cóncava y manteniéndola fija mediante el dispositivo de sujeción.

En este momento el observador, que verá la imagen del test borrosa, debe girar la rueda de enfoque hasta conseguir ver dicha imagen con la máxima nitidez posible. Es entonces cuando la escala de dioptrías marca la lectura que se corresponde con la potencia frontal de la citada lente problema.

Normalmente, la medida de una lente esférica no sólo consiste en la obtención de su potencia, sino que, excepto en el caso de que se deban introducir efectos prismáticos, previamente es necesario centrarla correctamente para poder marcar su centro óptico y realizar una medida correcta.

El centrado de la lente en el frontofocómetro se realiza desplazando manualmente la lente, hasta conseguir que el test esté perfectamente centrado en el retículo; de esta manera aseguramos la coincidencia del eje óptico de la lente con el eje óptico del frontofocómetro. Para marcar la lente se utiliza el dispositivo de marcado que consta de tres patas impregnadas de tinta, que las cuales se ponen en contacto con la superficie convexa de la lente, marcando de esta forma tres puntos, de los cuales el punto central representa la proyección del centro óptico de la lente sobre dicha superficie frontal.

Potencia esferométrica

Se conoce con el nombre de potencia esferométrica o potencia aproximada la suma algebraica de las potencias de las dos superficies de la lente. Recibe este nombre puesto que en la propia definición se considera la lente delgada y, en consecuencia, se desprecia el término de espesor que aparece en la expresión de la potencia verdadera.

En óptica oftálmica es habitual denominar a esta potencia potencia esferométrica ya que, en la práctica, la forma más corriente de obtenerla es midiendo P_1 y P_2 con un esferómetro de Ginebra (cilindrómetro) graduado en dioptrías y calibrado para un determinado índice de refracción.

$$P_E = P_1 + P_2 = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{3.37}$$

El esferómetro de Ginebra que se muestra en la figura 3.15 apoyado sobre una superficie plana (a) consta de tres palpadores, dos de ellos fijos en los extremos y un tercero móvil en el centro. Si se apoya el esferómetro en una superficie convexa (figura 3.15b) la posición del palpador móvil en relación a los fijos proporciona el valor de la sagita para un diámetro de cuerda igual a la distancia entre los dos palpadores fijos del esferómetro.

Un mecanismo transformador de movimientos actúa sobre una aguja que marca, sobre una escala graduada en dioptrías, una lectura que es función de la posición del palpador móvil en relación a los dos fijos.

A partir de las expresiones obtenidas en el apartado 3.2 de este capítulo, la relación entre la sagita medida (s) y la anchura de la cuerda (h) es:

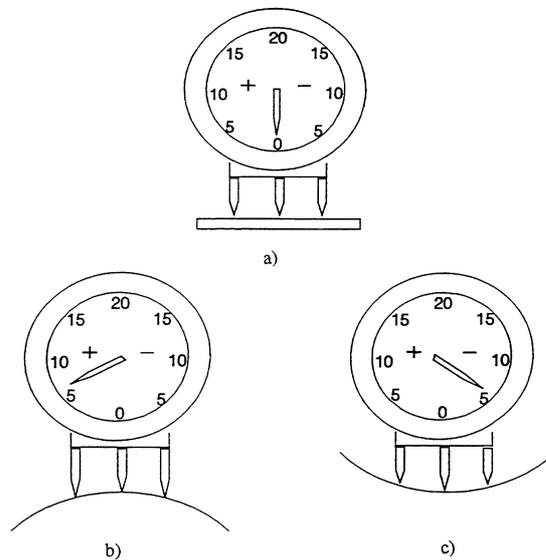


Fig. 3.15 Principio del esferómetro de Ginebra

$$r = \frac{4s^2 + h^2}{8s} \quad (3.38)$$

Por otra parte, el esferómetro está calibrado para un cierto valor de n (normalmente 1.523) y el valor de P , en el caso de medir en una superficie convexa, viene dado por:

$$P = \frac{(n-1)}{r} \quad (3.39)$$

que corresponde a P_1 en el caso de una lente en forma de menisco.

Análogamente, si el esferómetro se apoya sobre una superficie cóncava (figura 3.15.c) el valor de P obtenido será negativo

$$P = \frac{(1-n)}{r} \quad (3.40)$$

y corresponde en el caso de un menisco a P_2 .

Cuando el índice de refracción de la lente es distinto al índice para el cual está calibrado el esferómetro, hay que multiplicar la lectura por un factor de corrección que vamos a deducir para el caso de una superficie convexa de radio r . El esferómetro marcará en este caso como lectura:

68

$$P_{1E} = \frac{(n_E - 1)}{r} \quad (3.41)$$

donde n_E es el índice de referencia del esferómetro.

Si la lente que se está midiendo está fabricada en material de índice n_L , la lectura será incorrecta puesto que realmente la potencia P_{1E} tiene por valor:

$$P_{1L} = \frac{(n_L - 1)}{r} \quad (3.42)$$

Despejando r e igualando se obtiene:

$$P_{1L} = \frac{(n_L - 1)}{(n_E - 1)} P_{1E} \quad (3.43)$$

La potencia buscada P_{1L} es igual a la potencia medida con el esferómetro P_{1E} multiplicada por el factor de corrección de índice $(n_L-1)/0.523$. La deducción para una superficie negativa conduce al mismo valor de corrección.

Potencia nominal y curva base: cálculo exacto de lentes esféricas

Cuando se habla de la forma de una lente, es habitual referirse a la curva base de la misma, o simplemente base de la lente. Este término a menudo se usa de forma incorrecta ya que se presta a diferentes interpretaciones.

En un principio, se definía la *base de una lente esférica* como la potencia de su superficie más plana, es decir, la de mayor radio de curvatura. Según esto, la base de una lente en forma de menisco, es la potencia de la superficie posterior para lentes positivas, mientras que para las negativas la base corresponde a la potencia de la superficie anterior. En esta definición se basan las primeras lentes en forma de menisco llamadas periscópicas, de base ± 1.25 D, y posteriormente los meniscos de base ± 6 D. Ahora bien, en el sistema de fabricación actual el diseño de lentes oftálmicas pretende controlar, en la medida posible, las aberraciones y el concepto de base pierde sentido, ya que rigurosamente a cada potencia de lente le correspondería una base diferente. En la práctica se intenta llegar a un compromiso: en un intervalo de potencias se fabrican las lentes con idéntica potencia en una de sus caras (normalmente la primera), y es a ésta a la que se denomina curva base o *base de fabricación*, y la que se acostumbra a presentar en forma de tabla para comparar distintas series de lentes. El número total de curvas base varía entre los distintos fabricantes y proporciona un índice de la precisión en el diseño de lentes oftálmicas por parte de los mismos.

Por otra parte, si la lente tiene sólo una superficie realizada (semiterminado), se aplica el término de base a la potencia de la cara terminada, que por lo general suele ser también la primera superficie a la que se identifica por su potencia nominal P_{1N} y su base P_1 .

Se define la potencia nominal P_{1N} de un semiterminado a la potencia de la primera superficie si la lente fuera delgada o, lo que es lo mismo, al producto $g' P_1$. Lógicamente, P_{1N} dependerá, a través de g' , del espesor de centro de la lente. El concepto de potencia nominal presenta su máximo interés en fabricación ya que basta con conocer la potencia de la segunda superficie de la lente y sumarla a la nominal para conocer la potencia frontal de la lente.

$$P_{1N} = g' P_1 = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} \tag{3.44}$$

69

$$P_{VP} = g' P_1 + P_2 = P_{1N} + P_2 \tag{3.45}$$

Esta última expresión (45), deducida anteriormente para relacionar la potencia frontal con las potencias de las caras de la lente, constituye la ecuación fundamental para el cálculo exacto de lentes oftálmicas.

Supongamos una lente gruesa en forma de menisco tal y como muestra la figura 3.16. El foco imagen F' del conjunto es la imagen de F'_1 (foco imagen de la cara anterior) a través del segundo dioptrio de la lente. Si planteamos esta ecuación considerando que la lente está sumergida en aire, entonces:

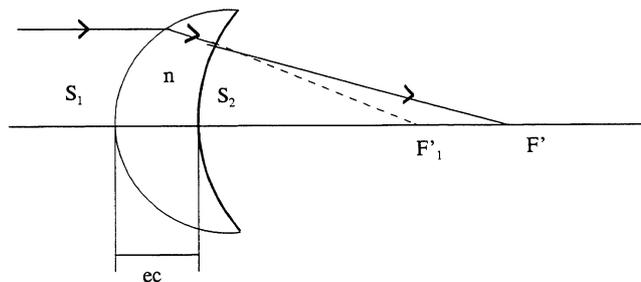


Fig. 3.16 Cálculo exacto en una lente esférica gruesa

$$\frac{1}{S'_2 F'} = \frac{n}{S'_2 F'_1} + P_2 \tag{3.46}$$

$$\frac{n}{S'_2 F_1} = \frac{n}{S'_2 F_1 - e_c} = \frac{1}{\frac{1}{P_1} - \frac{e_c}{n}} = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} = g' P_1 \tag{3.47}$$

$$P_{VP} = P_{IN} + P_2 \tag{3.48}$$

Esta deducción es análoga a la realizada en el apartado de potencia de vértice posterior, aunque en este caso se ha empleado la notación frontal posterior.

Cuando se considera la lente delgada, se desprecia el espesor de centro de la misma, lo que equivale a confundir P_{IN} con P_1 , o lo que es lo mismo, confundir potencia frontal con esferométrica (lo cual es lícito en el caso de lentes negativas, donde el espesor de centro tiende a cero y en consecuencia $P_{IN} \approx P_1$).

Cabe destacar que los fabricantes trabajan con una gama de aproximadamente 6 semiterminados para cada índice de refracción. En realidad, lo que caracteriza a un semiterminado es P_1 , aunque usualmente se clasifican por el valor de P_{IN} que, lógicamente, corresponde a un único valor del espesor de centro.

En el caso de lentes positivas (donde a diferencia de las negativas el espesor de centro es significativo) se puede emplear para el cálculo exacto un método iterativo, que se propone a continuación a partir de un ejemplo, en el que suponiendo un valor inicial de $e_c = 0$, se calculan los valores de P_1 y e_c , que permiten obtener la potencia de vértice posterior deseada dentro de los márgenes de tolerancia establecidos por la norma DIN 58203 (tabla 3.1).

70

Tabla 3.1

P_{VP} (D)	ΔP_{VP} (D)
0.00 a ± 3	1/16
± 3.25 a ± 12.00	1/8
$\geq \pm 12.25$	1/4

Supongamos, por ejemplo, que partimos de un semiterminado de $P_{IN} = +10.50$ D, $n = 1.523$ para fabricar una lente de $P_{VP} = +8.00$ D, $\phi = 55$ mm y $e_b = 1$ mm, y queremos calcular las características que tendrá la lente una vez fabricada. Podemos calcular en primer lugar la potencia de la segunda superficie según la ecuación (48):

$$P_2 = 8 - 10.50 = -2.50 \text{ D}$$

a la que le corresponderá:

un valor de $R_2 = (1 - 1.523) / (-2.50 \cdot 10^{-3}) = 209.2$ mm
 y una sagita $s_2 = 209.2 - (209.2 - (55/2)^2)^{1/2} = 1.81$ mm

Aplicando las siguientes expresiones, se construye la tabla de iteraciones (tabla 3.2) hasta que el espesor de centro en la primera y última columna son iguales

$$P_1 = \frac{P_{IN}}{1 + \frac{e_c}{n} P_{IN}} \tag{3.49}$$

$$e_c = e_b + s_1 + s_2 \tag{3.50}$$

Si comprobamos ahora el valor de P_{VP} , obtenemos:

$$P_{VP} = \frac{10,016}{1 - \frac{7,016 \cdot 10^{-3}}{1.523}} - 2.50 = + 8.00 D$$

Tabla 3.2

<i>Ec (mm)</i>	<i>P₁ (D)</i>	<i>R₁ (mm)</i>	<i>s₁ (mm) para diámetro 55 mm</i>	<i>ec (mm)</i>
0	+10,500	49,809	8,279	7,496
7,469	+9,985	52,374	7,800	6,990
6,990	+10,017	52,210	7,829	7,019
7,019	+10,016	52,219	7,826	7,016
7,016	+10,016	52,219	7,826	7,016

También se puede plantear si sería posible fabricar una lente de $P_{vp} = + 6.00 D$ con el mismo semiterminado, es decir, manteniendo constante la P_1 .

El valor de P_1 es conocido (10,016 D), al igual que su radio de curvatura y su sagita:

$$R_1 = 52.19 \text{ mm}$$

$$s_1 = 7.826 \text{ mm}$$

A partir de la ecuación (48) obtenemos:

$$P_2 = + 6.00 - 10.50 = -4.50 D$$

$$R_2 = 116.22 \text{ mm}$$

$$s_2 = 3.298 \text{ mm}$$

$$ec = 7.826 + 1 - 3.298 = 5.527 \text{ mm}$$

Con estos datos, la variación de la potencia de vértice posterior está dentro del límite de variación tolerado, por lo que podría utilizarse el semiterminado para fabricar la lente de +6.00 D (3.52) y (3.53).

$$P_{VP} = \frac{10,016}{1 - \frac{5,527 \cdot 10^{-3}}{1.523}} - 4.50 = + 5.89 D$$

$$\Delta P = 6,00 - 5,89 = 0,106 < 0,125$$

3.5 Relación peso-potencia

Como ya se ha visto en el apartado 3.3, el peso de una lente oftálmica esférica depende de diversos parámetros, entre ellos la potencia de la lente. Para analizar comparativamente la variación del peso con la potencia es habitual fijar como parámetro el índice de refracción del material o el diámetro de la lente. Así, la figura 3.17 muestra la variación del peso de lentes esféricas positivas fabricadas en

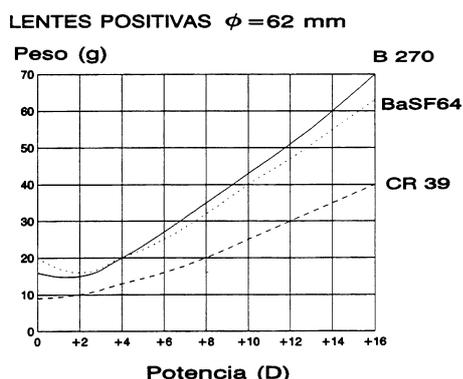


Fig. 3.17 Peso de lentes esféricas positivas en función del diámetro para diferentes potencias

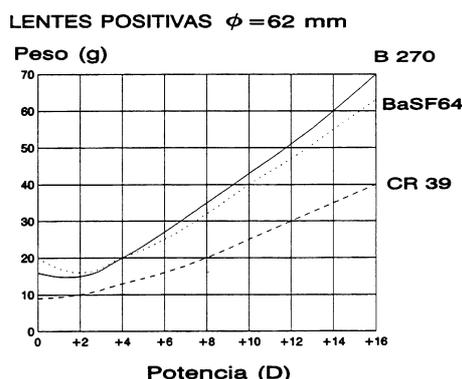


Fig. 3.18 Peso de lentes esféricas positivas para diferentes materiales

vidrio *crown* de índice 1,523, en función del diámetro. Se puede observar cómo, para un mismo diámetro, el peso de la lente aumenta con la potencia y cómo, para una potencia de lente dada, el peso también aumenta con el diámetro de la misma.

Para una potencia no representada se puede obtener el peso por interpolación, aunque a menudo se acostumbra a representar la variación de peso con la potencia de la lente fijando el diámetro de la misma, como muestra la figura 3.18, que representa un estudio comparativo del peso de lentes posi-

72

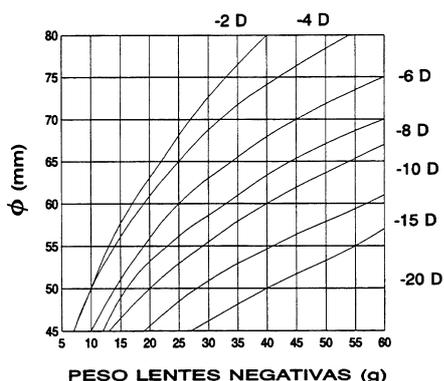


Fig. 3.19 Peso de lentes esféricas negativas en función del diámetro para diferentes potencias

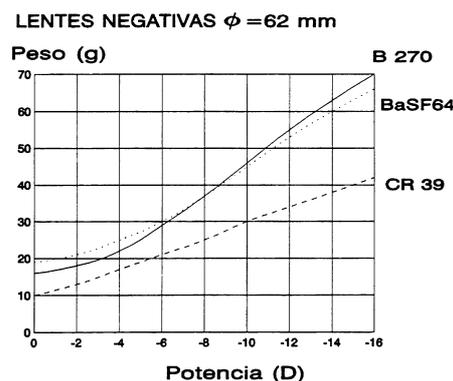


Fig. 3.20 Peso de lentes esféricas negativas para diferentes materiales

tivas de 62 mm de diámetro, para tres materiales diferentes: orgánico CR-39, *crown* B 270 y un alto índice Ba SF 64. Se puede observar que, para cualquier potencia, el peso es considerablemente menor para el material orgánico CR-39. En cuanto a los dos materiales inorgánicos representados, hay que destacar que las lentes de alto índice, cuyo volumen es considerablemente menor al de las de índice 1.523, pesan ligeramente menos únicamente para potencias mayores que +4.00 D. En la zona de bajas potencias ocurre lo contrario: las lentes de alto índice son más pesadas que las de vidrio *crown*. Esto es debido a que la disminución de volumen no es proporcional a la disminución de peso ya que, por lo general, la densidad de los vidrios de alto índice es muy alta.

Análogamente, se puede representar el peso de las lentes negativas en función del diámetro (figura 3.19) y la comparación de peso de diferentes materiales para cada potencia tomando un diámetro constante de lente (figura 3.20).

Por último, la manera más común de representar el peso de las lentes en función de la potencia se muestra en el ejemplo de la figura 3.21 (vidrio *crown* 1,523), donde a cada intervalo de potencias corresponde un determinado diámetro de fabricación. Esta gráfica es bastante útil ya que proporciona el peso real de la lente estándar en bruto, aunque, a diferencia de las gráficas anteriores, no permite establecer comparaciones entre lentes de diferentes escalados de fabricación en cuanto a diámetro.

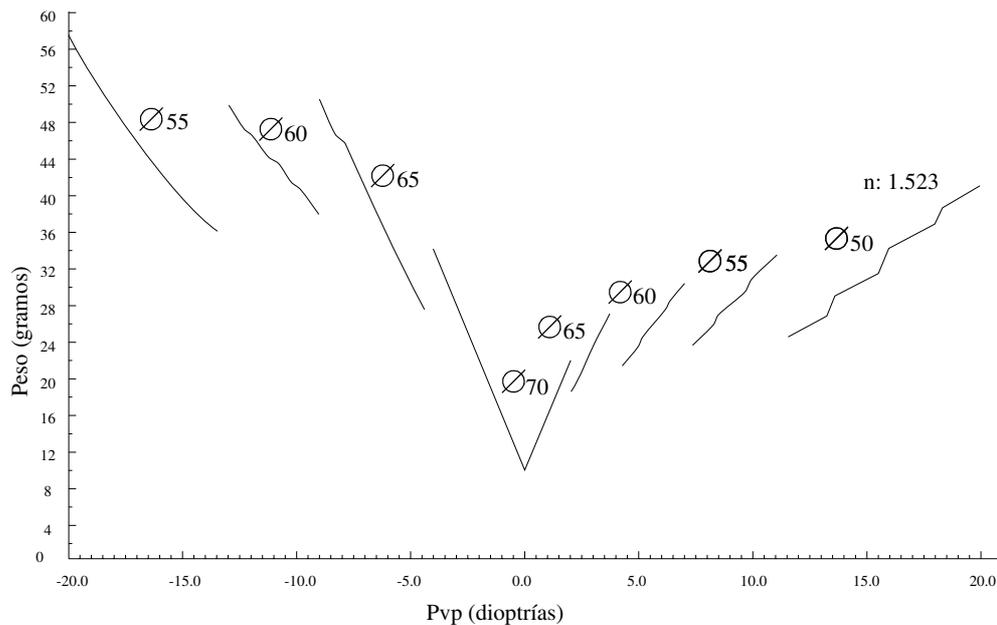


Fig. 3.21 Peso de lentes esféricas de distintas potencias, en función del diámetro

Bibliografía

- C.E.S.O.A. *Optique Ophthalmique (Technologie), 2ème partie*. Bruselas, Assotiation des diplômés CESOA-SCTOW. ASBL, 1986.
- FANNIN, T.E.; GROSVENOR T. *Clinical Optics*. Boston, Butterworths, 1987.
- JALIE, M. *The Principles of Ophthalmic Lenses*. Londres, The Association of British Dispensing Opticians, 1988.
- LE GRAND, Y. *Optique Physiologique, vol. I*. París, Revue d'optique, 1964.
- SALVADÓ, J.; CAUM, J. «Peso de lentes oftálmicas». *Ver y Oír* nº 63, Puntex, 1992.
- SCHIKORRA A. «Lentes monofocales astigmáticas y prismáticas». *Ver y Oír* nºs 38 a 53, Puntex, 1989.

Capítulo 4

Lentes esféricas

M. L. Vera

4.1 Superficies ópticas esféricas

Superficies conicoides

Las superficies esféricas conicoides o de asfericidad continua se generan por revolución de las curvas esféricas más simples, las cónicas.

Este tipo de curvas se obtiene al seccionar un cono por distintos planos; si la sección se realiza de forma perpendicular al eje del cono la curva que resulta es un círculo, si esta sección es paralela obtenemos un parábola y si el corte se realiza con una inclinación determinada se obtienen los dos tipos de elipses y las hipérbolas, tal y como se observa en la figura 4.1:

75

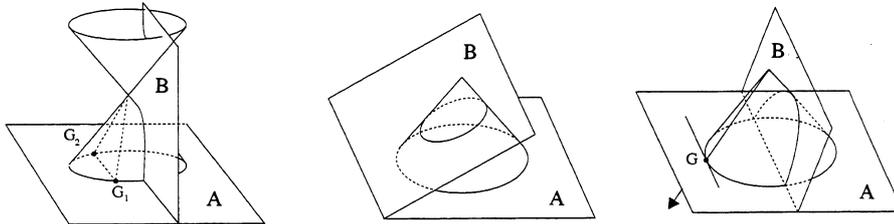


Fig. 4.1

Al hacer girar estas secciones cónicas alrededor de un eje, según la cónica de revolución empleada se generan superficies elipsoides, paraboloides e hiperboloides, considerándose la esfera como un caso especial de elipsoide. Así, las superficies esféricas conicoides pueden representarse de un modo simple en sección a través de las cónicas que las generan.

A lo largo de la bibliografía se pueden encontrar diversas expresiones matemáticas que representan este tipo de curvas; estas expresiones varían unas de otras en función del origen y del tipo de coordenadas empleado. Nosotros emplearemos la representación matemática válida para todas las cónicas, centrada con el vértice de la superficie en el origen de coordenadas en la que el eje x es el eje de revolución y que se expresa del siguiente modo:

$$y^2 = 2r_0x - px^2 \quad (4.1)$$

donde r_0 es el radio de curvatura en el origen (0,0) y p es un coeficiente que indica el grado de asfericidad; en función de cómo sea el valor de p se puede deducir el tipo de cónica de revolución que genera la superficie esférica, tal y como se muestra en la figura 4.2:

$p < 0$	hipérbola
$p = 0$	parábola
$0 < p < 1$	elipse (con el eje mayor en el eje X)
$p = 1$	círculo
$p > 1$	elipse (con el eje mayor en el eje Y)

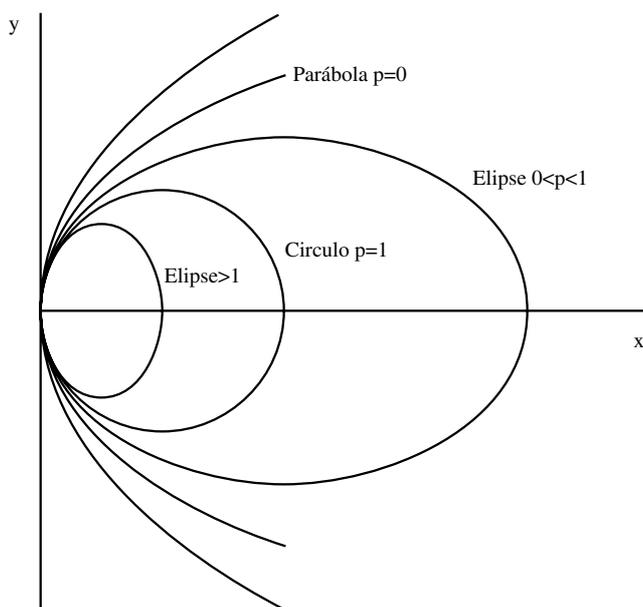


Fig. 4.2

En ocasiones se requiere deformar este tipo de superficies de un modo controlado, por lo que se añaden una serie de términos a la ecuación y la superficie queda descrita como:

$$y^2 = 2r_0x - px^2 + \sum a_{2n}x^{2n} \quad (4.2)$$

El primer término de esta expresión corresponde a la ecuación general de las cónicas y el resto de los términos corresponden a lo que denominamos coeficiente de deformación. Estos coeficientes van decreciendo a medida que aumenta el valor de x por lo que sólo los primeros términos contribuyen de forma importante en la descripción de la superficie.

76

Superficies de tipo polinómico

Conocidas también como superficies de asfericidad zonal, son superficies de curvatura no constante que se obtienen por revolución de una curva con un perfil determinado que puede expresarse matemáticamente de forma polinómica. Definir un determinado perfil mediante un polinomio que se ajuste de manera perfecta a los puntos de la superficie es complejo, ya que el mejor ajuste lo encontramos para polinomios de grado elevado y en polinomios de este tipo aparecen fuertes ondulaciones que no reflejan la suavidad y continuidad de la superficie.

Para solucionar este problema, la mejor solución es expresar la superficie con un tipo de curvas llamadas *polinomios de spline*. La representación de la superficie mediante este tipo de polinomios consiste en dividir el perfil de la curva en una serie de intervalos, cuyos extremos se denominan nodos, como muestra la figura 4.3:

Cada intervalo o zona comprendida entre dos nodos puede describirse geoméricamente mediante una función que debe tener la característica de ajustarse al perfil del intervalo y que en los extremos o nodos sea continua con la función definida en el intervalo o zona adyacente. La función que responde a estas necesidades es un polinomio de tercer grado conocido como *spline cúbico*. De este modo se define una función *spline cúbica* para cada intervalo de un perfil esférico cuyas propiedades pueden variar de forma independiente de las de los intervalos adyacentes, siempre y cuando se cumpla que en los nodos o puntos de intersección de dos intervalos la derivada primera y la derivada segunda sean continuas y coincidentes, lo que asegura que el perfil es globalmente liso y continuo. Este principio puede transferirse de curvas a superficies por lo que la introducción en el diseño de superficies esféricas de los polinomios *spline* mejoran las condiciones de cálculo puesto que al ser polinomios de tercer grado son fáciles de resolver y derivar además de no ser sensibles a redondeo.

Hoy en día, se utilizan superficies *spline* en la construcción de automóviles, aviones, y una innumerable lista de objetos aerodinámicos además de utilizarse en el diseño de superficies oftálmicas como son las curvas esféricas y las progresivas.

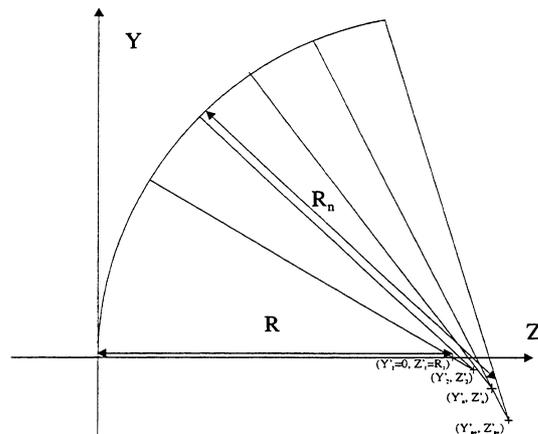


Fig. 4.3

4.2 Parámetros de las lentes oftálmicas esféricas

Las lentes oftálmicas esféricas se caracterizan por tener como mínimo una de sus superficies esféricas como las descritas en el apartado anterior.

La introducción de este tipo de superficie en el diseño de lentes oftálmicas permite producir lentes con curvas más planas que combinan de modo satisfactorio criterios de calidad de imagen y estética que con diseños esféricos es imposible conseguir (capítulo 7).

En lentes de este tipo la superficie esférica debería reemplazar a la superficie de la lente de radio más curvado, que corresponde con la convexa en lentes positivas y con la cóncava en lentes negativas. No obstante en la mayoría de lentes la superficie esférica se encuentra en la cara anterior. El motivo es únicamente de tipo económico, ya que si la cara externa de la lente es esférica se obtienen semiterminados, a partir de los cuales se pueden realizar diversas prescripciones tanto esféricas como cilíndricas cambiando sólo los parámetros de la cara posterior, sin que el proceso de fabricación varíe del de las lentes esféricas y esferotóricas en lo que respecta a la segunda superficie.

El hecho de realizar la primera superficie esférica permite optimizar las lentes de potencia positiva tanto en estética, al aplanar las superficies disminuyendo el volumen, como en comodidad, debido a la disminución de peso de las lentes. Por su parte, la asferización de las lentes negativas no ofrecerá tantas ventajas desde el punto de vista estético.

Para poder definir de un modo simple los parámetros de este tipo de lentes nos basaremos a lo largo de todo el capítulo en un diseño en el que la primera superficie es de asfericidad continua o conicoide; de este modo facilitaremos la comprensión y los cálculos y cualquier conclusión obtenida con este modelo será aplicable a otros diseños más complejos.

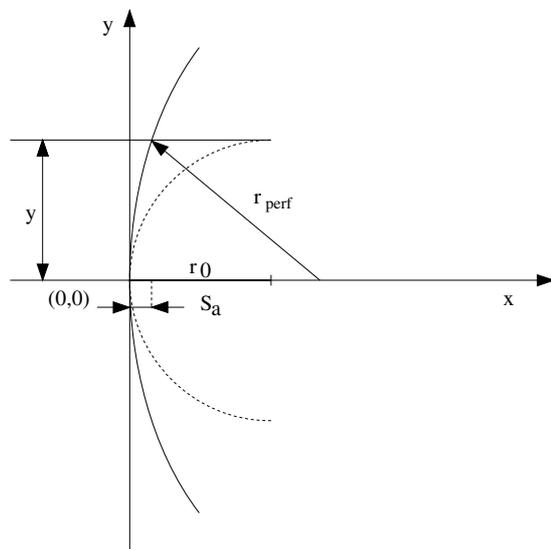
Si representamos el perfil de la superficie esférica a través de la siguiente expresión simplificada:

$$y^2 = 2r_0x - px^2 \tag{4.3}$$

se pueden obtener todos los puntos de la cónica en función de dos parámetros fijos, el radio obsculatriz r_0 y el coeficiente de asfericidad p .

El radio obsculatriz es el radio equivalente al de un círculo en la zona apical de la superficie, y con el que se determina el poder dióptrico en el eje. El valor de este radio va variando a lo largo de la superficie, de tal forma que ésta va aplanándose a medida que nos alejamos desde el centro a la periferia. El factor que controla este aplanamiento es el coeficiente de asfericidad, que indica la deformación de la superficie esférica respecto a la esfera del mismo radio.

Si calculamos el radio para cada punto de la lente, en el punto más extremo obtenemos el siguiente radio periférico (figura 4.4):



$$y^2 + (r_0 - s_a)^2 = r_{perif}^2 \tag{4.4}$$

$$r_{perif} = \sqrt{y^2 + (r_0 - x)^2} \tag{4.5}$$

Gracias al coeficiente de asfericidad la superficie con perfil esférico es más plana hacia los bordes que la superficie puramente esférica para un mismo radio de curvatura frontal.

4.3 Espesor y peso

En las superficies asféricas no es correcto hablar de sagitas puesto que este concepto es aplicable únicamente a secciones de esferas. Necesitamos un nuevo concepto al que llamamos *profundidad sagital* y que definimos

como la diferencia de profundidad que existe para cada punto de la lente respecto al vértice de ésta.

Si expresamos la ecuación 4.1, en función del diámetro de la lente y llamamos a x profundidad sagital y lo designamos como s_a , tenemos:

$$\left(\frac{\varnothing}{2}\right)^2 = 2r_0 s_a - ps_a^2 \tag{4.6}$$

De modo que despejando, la profundidad sagital queda:

$$s_a = \frac{r_0}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\varnothing}{2}\right)^2}{p}} \tag{4.7}$$

La profundidad sagital es menor que la sagita para una superficie esférica del mismo radio al ser la superficie esférica más plana.

El cálculo de los espesores en este tipo de lentes se realiza a través de las sagitas de las superficies del mismo modo que para las lentes esféricas, con la particularidad de que se utiliza la profundidad sagital para la superficie esférica por lo que los espesores serán menores (figura 4.5).

El espesor disminuirá o aumentará en función de la potencia de la lente, siendo esta variación de espesor más suave que la variación del mismo tipo que se produce en lentes esféricas.

El hecho que la geometría de la superficie esférica se aplane hacia los bordes permite obtener lentes más delgadas que consecuentemente tendrán menos volumen.

La expresión para calcular el volumen de este tipo de lentes en función de los casquetes y del cilindro que la forman es la misma que se utiliza para las lentes esféricas (capítulo 3), con la salvedad que el casquete de una superficie esférica viene dado en función de los parámetros de su superficie:

$$V_{casf} = \frac{\pi}{3} s_a^2 (3r_0 - ps_a) \tag{4.8}$$

El peso de la lente vendrá determinado por la densidad del material vítreo utilizado y el volumen de la lente.

4.4 Potencia

Como la primera superficie de la lente es una superficie de radio no constante, la potencia que depende directamente del radio de curvatura, también variará.

A partir del radio central u obscuratriz podemos definir el poder dióptrico de la superficie esférica en el eje como:

$$P_1 = \frac{n-1}{r_0} \tag{4.9}$$

Al alejarnos desde el centro a la periferia el radio aumenta de manera que el poder dióptrico para cualquier punto de la lente viene dado por:

$$P_{perif} = \frac{n-1}{r_{perif}} = \frac{n-1}{\sqrt{y^2 + (r_0 - s_a)^2}} \tag{4.10}$$

Como el radio en la periferia es siempre mayor que el radio obscuratriz puesto que y aumenta en mayor grado que s_a , el poder dióptrico siempre disminuirá desde el centro a la periferia.

Al analizar la lente de forma completa no sólo se ha de tener en cuenta la variación del poder dióptrico de la superficie esférica sino que también analizaremos la variación de espesor que tiene lugar a lo largo de todo el diámetro, manteniéndose como parámetro fijo el poder dióptrico de la superficie esférica o tórica.

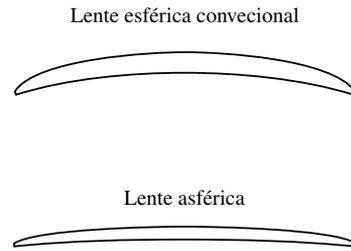


Fig. 4.5

Si realizamos un análisis de la potencia de vértice posterior en el centro óptico de la lente y en un punto en la periferia ocurre para una lente de potencia positiva:

$$Pv_{peje} = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1} + P_2 \quad (4.11)$$

$$Pv_{pperif} = \frac{P_{perif}}{1 - \frac{e_c}{n} P_{perif}} + P_2 \quad (4.12)$$

En puntos de la periferia en los cuales el poder dióptrico de la superficie esférica disminuye, también disminuye el espesor. Por lo que la potencia disminuirá de forma más rápida que en una lente esférica en el que la variación de potencia es sólo debida al espesor.

4.5 Comparación entre lentes esféricas y esféricas

Las lentes esféricas presentan con respecto a las lentes esféricas convencionales de la misma potencia una disminución considerable de espesores, volumen y peso. Por lo tanto son lentes más confortables puesto que son más ligeras y delgadas, además de ofrecer ciertas mejoras en la minimización de aberraciones debido a su diseño (capítulo 7).

80

Estas ventajas se deben básicamente a la combinación de tres factores en la fabricación de las lentes que son:

- Superficie esférica en la primera cara de la lente
- Espesor de borde más delgado
- Tipo de material empleado en su fabricación

Analizaremos por separado las ventajas que ofrecen estos tres factores:

a) *Asfericidad*: la introducción del coeficiente de asfericidad en el diseño de lentes permite aplanar la primera superficie que corresponde con la más curvada en lentes positivas y con la más plana en lentes negativas.

Si analizamos la influencia de este parámetro en la variación de espesor y peso de una lente al variar coeficiente de asfericidad, obtenemos las siguientes gráficas (figura 4.6):

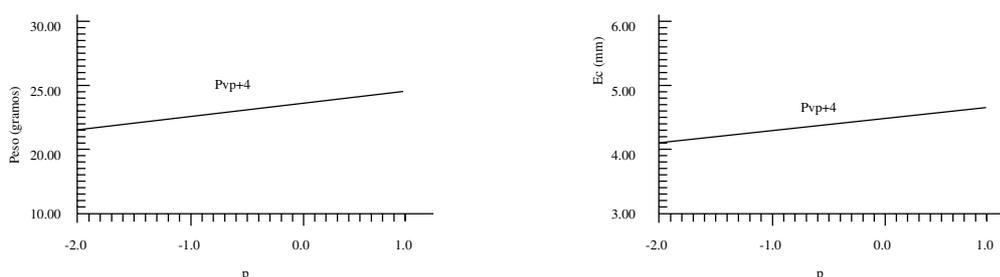


Fig. 4.6

El hecho de añadir este coeficiente ofrece mejoras tanto estéticas como de comodidad, puesto que las lentes son más delgadas y más ligeras, y se observa que estas mejoras son más notables cuanto más negativo es este coeficiente, es decir para superficies hiperboloides. No obstante, el valor del coeficiente de asfericidad va ligado al diseño de la lente en la minimización de aberraciones por lo que su valor dependerá de una solución de compromiso en la que intervengan tanto aspectos de estética y confortabilidad como aspectos de calidad. Analizando tanto para lentes positivas como negativas la variación de espesores y peso en función de el coeficiente de asfericidad, obtenemos las siguientes gráficas (figuras 4.7 a y b):

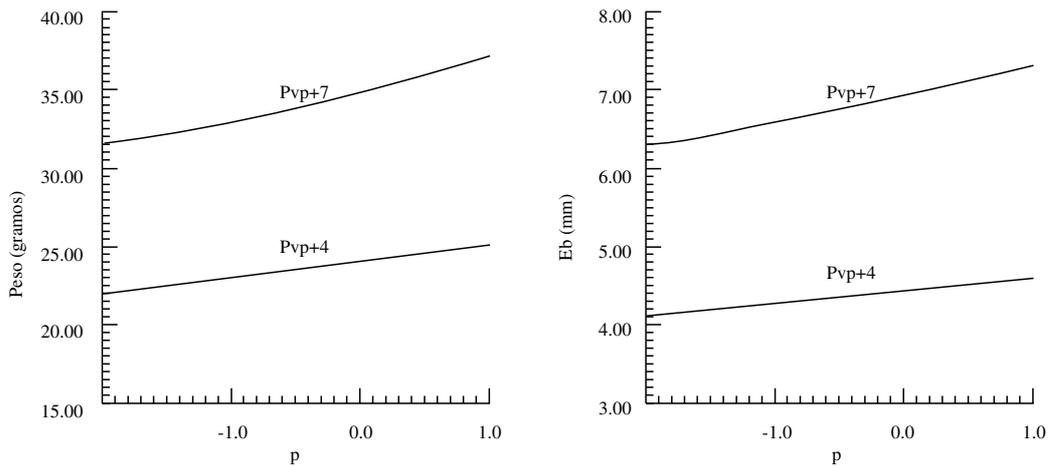


Fig. 4.7a

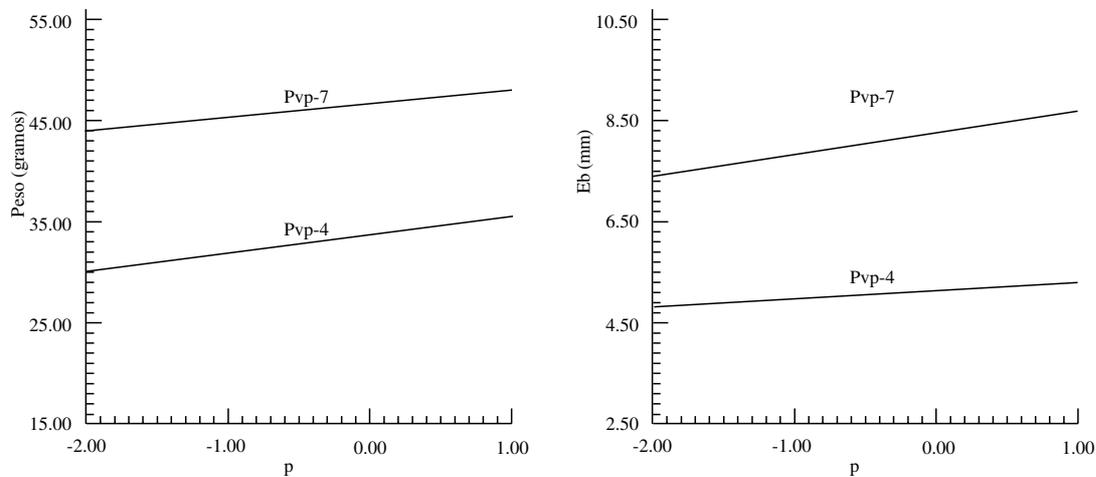


Fig. 4.7b

En las gráficas de la figura 4.7a y 4.7b observamos que cuanto mayor es la potencia de la lente mayor es la disminución de espesor y peso, por lo que asferizar las lentes es un buen recurso para obtener ventajas en lentes de potencia alta.

A partir de las gráficas podemos observar también que las variaciones de espesores y peso son mucho más acusadas para lentes positivas que para lentes negativas. Por este motivo la asfericidad es un recurso más utilizado en lentes positivas que en negativas.

b) *Reducción del espesor*: las lentes asféricas normalmente se fabrican con espesores de borde más delgados que los que se fabrican en lentes esféricas. Esta disminución en el espesor se traduce en una disminución en el volumen de la lente por lo que las lentes serán más estéticas al ser más delgadas y más ligeras debido a la disminución de material.

c) *Materiales empleados en la fabricación*: los materiales más comúnmente empleados para fabricar este tipo de lentes son los vidrios de alto índice tanto orgánicos como minerales. Los vidrios de alto índice permiten para una determinada potencia fabricar las superficies con curvas más planas, lo que da como resultado lentes más delgadas, si a este hecho le añadimos la disminución de espesores y volúmenes producida al asferizar la lente y fabricarla con espesores de borde más delgados obtenemos lentes mucho más delgadas que las lentes esféricas convencionales.

Esta reducción de volumen debida a estos tres factores es más notable que el aumento de la densidad propio de los materiales de alto índice y esto produce que las lentes asféricas sean más ligeras. El vidrio mineral que se utiliza mayoritariamente en la fabricación de lentes asféricas es el vidrio *hi-crown* de densidad 2,64, sólo un 3% mayor que la densidad del vidrio *crown*.

Para una lente de índice 1,6, potencia +4,00 D, diámetro 65 mm y espesor de borde 0,5 mm, el volumen y el peso son un 20% menor que en una lente *crown* de las mismas características.

4.6 Producción actual de lentes asféricas

82

De los diferentes tipos de lentes asféricas que existen, en este apartado vamos a referirnos únicamente a la producción actual en la que se utilizan dos tipos, las lentes con superficies convexas asféricas y las lentes con zonas de suavización.

Lentes con superficie convexa asférica

La mayoría de lentes asféricas que se fabrican atienden a esta geometría y se caracterizan por tener la superficie asférica generada por curvas de tipo polinómico. Esta geometría varía en función de la potencia de la lente, su diámetro, el material empleado y el criterio que emplea cada fabricante en el momento de llegar a una solución de compromiso que satisfaga tanto la estética de la lente como la comodidad y la calidad óptica.

Este tipo de lentes cubren gamas de potencias medias, desde -8,00 D hasta +8,00 D aproximadamente, para diámetros de fabricación desde 60 a 70 mm e incluso 80 mm para algunas potencias. Para su fabricación se utilizan materiales tanto orgánicos como minerales.

Los materiales orgánicos se emplean para fabricar mayoritariamente lentes positivas, por lo que las lentes orgánicas de alto índice ofrecen importantes mejoras estéticas respecto a las de CR-39 debido al aplanamiento de las curvas.

El material orgánico no se utiliza de manera frecuente en la fabricación de lentes asféricas negativas puesto que como ya hemos observado la asfericidad no ofrece grandes ventajas en lentes negativas.

En material mineral se fabrican tanto lentes de potencia positiva como negativa, y la gran mayoría de lentes que se fabrican son de índice 1,6.

Con motivo de minimizar las aberraciones entre los dos meridianos de las lentes astigmáticas de cilindro elevado, algunos fabricantes recurren a la utilización de superficies atóricas, que son super-

ficies de no revolución definidas por dos perfiles esféricos perpendiculares entre sí de diferente radio osculatriz y coeficiente de asfericidad, siendo la segunda superficie de estas lentes tórica.

Lentes esféricas con zonas de suavización

La técnica de suavización o *blending* es un recurso muy utilizado en lentes de alta potencia tanto negativa como positiva, para poder fabricar diámetros grandes con una disminución de los espesores en el borde y consecuentemente una reducción del material de la lente que las hace más ligeras.

Utilizando esta técnica en lentes positivas, además se obtiene una gran mejora del campo visual al disminuir el escotoma anular que se produce en los lenticulares utilizados para compensar la afuquia.

La superficie anterior de este tipo de lentes posee una geometría especial que consta de tres zonas continuas, siendo invisible el paso de una zona a otra.

La zona central es un elipsoide de revolución con un diámetro de 43 a 44 mm; contigua a esta zona se encuentra una corona intermedia de un ancho aproximado de 10 mm de forma elíptico-toroïdal seguida de una corona periférica para alcanzar el diámetro total de la lente que puede oscilar entre 65 y 67 mm, tal y como se muestra en la figura 4.8:

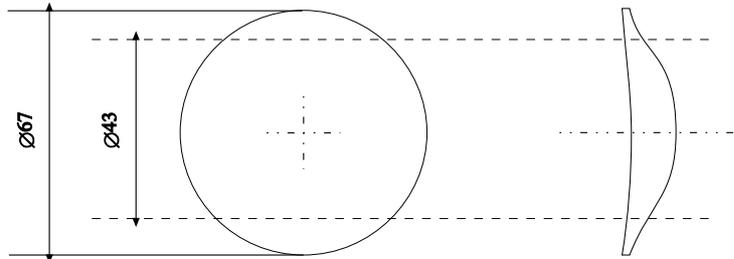


Fig. 4.8

Estas lentes se fabrican para potencias positivas superiores a +8,00 D siempre en material orgánico. En lentes negativas se utiliza esta técnica en el generado de la segunda superficie, para potencias superiores a -6.00 D, y en material *flint*.

Bibliografía

- CARRETERO, L.; FUENTES, R.; MARTÍNEZ, E.; FIMIA, A. «Geometría de las superficies esféricas utilizadas en la óptica oftálmica». *Ver y Oír* nº 51, Puntex, 1991.
- FOWLER, C. «Determination of the surface curves of aspheric single vision spectacle lenses». *The Optician*, 1981.
- FÜRTER, G. «Hypal –das asphärisch-atorische Einstärken– Design». Heidelberg, *Optometrie Zeiss* nº 5, 1986.
- GARCÍA, J.; LÓPEZ PELLICER, M. *Álgebra lineal y geometría*. Alcoy, Marfil, 1989.
- JALIE, M. «Aspheric Lenses: The New Generation». *The Optician*, 1989.
- RIGLER, A.K.; VOGL, T.P. «Spline Functions: an Alternative Representation of Aspheric Surfaces». *Applied Optics* nº 7, 1971.

- SÁNCHEZ GALLEGO, J.A. *Geometría descriptiva. Sistemas de proyección cilíndrica*. Barcelona, Ed. UPC, 1994.
- SMITH, G.; ATCHISON, D.A. «Construction, Specification, and Mathematical Description of Aspheric Surfaces». *Am J Optom Physiol Opt* n° 3, 1883.
- SMITH, G.; BAILEY I.L. «Aspheric Spectacle Lenses-Design and Performance». *The Optician*, 1981.
- SPIEGEL, R. *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Colombia, Mc.Graw Hill, 1968.
- VERA, M.; CAUM, J.; SALVADÓ, J. «Peso de lentes oftálmicas esféricas». *Ver y Oír* n° 85, 1994.
- VILHELM, F. «Le choix des verres à dégagement et des verres asphériques». *L'Opticien Lunettier* n° 484, 1994.

Capítulo 5

Lentes astigmáticas

B. Doménech, C. Hernández, C. Illueca, M.M. Seguí

5.1 Superficies ópticas astigmáticas

Las superficies astigmáticas, a diferencia de las esféricas, no presentan equivalencia en todos sus meridianos, por lo que tanto sus propiedades geométricas como ópticas no se mantienen constantes en todas las secciones de la superficie. Existen dos tipos de superficies ópticas astigmáticas, las superficies cilíndricas y las superficies tóricas. Las *superficies cilíndricas* se generan por la rotación de una línea recta alrededor de otra línea recta paralela a la primera que se denomina eje de revolución, tal y como muestra la figura 5.1, donde AR representa la línea generadora y XX' el eje de revolución.

La curvatura del cilindro es nula cuando se secciona por cualquier plano paralelo al eje de revolución, y es máxima si se secciona la superficie por un plano perpendicular al eje de revolución. En este último caso se obtiene una sección circular.

Estas dos secciones, perpendiculares entre sí, determinarán los meridianos principales de la lente astigmática. Las *superficies tóricas* se generan por la rotación de una circunferencia o arco de circunferencia alrededor de un eje de rotación contenido en su plano, pero que no pasa por el centro de curvatura del arco.

La curvatura de una superficie tórica varía desde un mínimo en una sección principal, hasta un máximo en la otra. Ambas secciones principales, que se denominan *meridiano* y *ecuador*, forman entre sí un ángulo de 90°.

El meridiano está determinado por el radio de curvatura r del arco generador, y en el ecuador el radio de curvatura R corresponde al radio de la circunferencia descrita por el extremo del diámetro del arco generador alrededor del eje de revolución.

Como muestra la figura 5.2, si el eje de revolución XX' no corta al círculo al que pertenece el arco generador, se pueden obtener dos formas diferentes, en anillo y en corsé. Por el contrario, si el eje de revolución XX' corta al círculo al que pertenece el arco generador, se obtienen las formas de calabaza y barril ilustradas en la figura 5.3. En la mayoría de los casos, los radios de curvatura

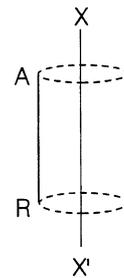


Fig. 5.1

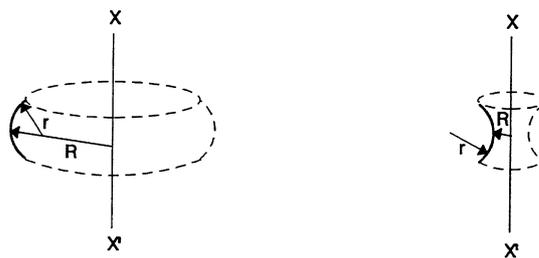


Fig. 5.2 Toroide en anillo $|R| > |2r|$, y en corsé



Fig. 5.3 Toroide en calabaza $|r| < |R| < |2r|$, y en barril $|R| < |r|$

en las dos secciones principales son ambos positivos, o ambos negativos; tan sólo en el caso del toroide en corsé, los radios de curvatura principales presentan signos opuestos. Por ello, esta última forma no se utiliza en la fabricación de lentes oftálmicas, sino que es el toroide en anillo el más utilizado.

Además, cada una de las superficies tóricas recogidas en las figuras 5.2 y 5.3 se pueden presentar en su forma positiva o negativa dependiendo de que se considere la parte exterior o interior del diagrama. En definitiva, dado

que la potencia de una superficie es inversamente proporcional al radio de curvatura de la misma, una superficie astigmática se caracteriza por presentar una potencia que varía en función de la sección o meridiano que se considere.

La variación se produce desde un mínimo de potencia, que aumenta gradualmente hasta un máximo. Los meridianos de máxima y mínima potencia algebraica son perpendiculares entre sí y se denominan meridianos principales, por lo que estas dos potencias son las potencias principales de una superficie astigmática.

Las lentes astigmáticas que se emplean en óptica oftálmica están formadas por una o varias superficies de este tipo, en las que las secciones principales son las mismas para todos los puntos de la superficie, constituyendo sistemas astigmáticos regulares que poseen un eje normal a todos los dioptrios, es decir, sistemas centrados.

86

5.2 El haz astigmático

Cuando un haz de rayos paralelos incide sobre una lente astigmática, los diferentes rayos que componen el haz refractado no se cortan en un punto, como en el caso de una lente esférica, sino en dos líneas rectas como se observa en la figura 5.4, donde F_v (horizontal) es la focal correspondiente al meridiano vertical M_v , y F_h (vertical) es la focal correspondiente al meridiano horizontal M_h , ambos

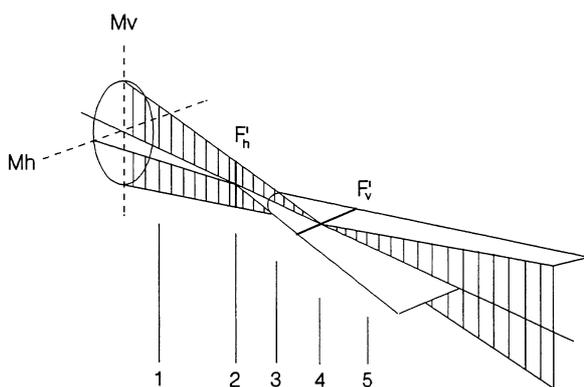


Fig. 5.4 Haz resultante de la refracción a través de una lente astigmática

meridianos principales de la lente astigmática. Estas dos líneas rectas son perpendiculares entre sí, no se cortan entre ellas pero sí cortan al eje, y se denominan *focales de Sturm*.

Si el diafragma de apertura es circular, las secciones del haz de rayos refractado tienen forma elíptica. Al colocar una pantalla en la posición 1, se observa una elipse con el eje vertical mayor que el horizontal. El eje horizontal se va reduciendo progresivamente hasta que en la posición 2 se forma la focal de Sturm vertical, correspondiente al meridiano horizontal. Tras ésta, el eje horizontal va aumentando de manera

que en la posición 3 la sección es un círculo, llamado *círculo de menor confusión*. A partir de aquí el crecimiento progresivo del eje horizontal lleva, en la posición 4, a la formación de focal de Sturm horizontal, correspondiente al meridiano vertical. A continuación las secciones vuelven a ser elipses con el eje horizontal mayor que el vertical (posición 5).

Las focales de Sturm, formadas por un sistema astigmático regular para un objeto situado en el infinito, se corresponden con las potencias máxima y mínima, es decir, con los meridianos principales. La distancia que separa dichas focales es el *intervalo de Sturm* y la diferencia de potencia entre los meridianos principales es el *astigmatismo del sistema*. En este tipo de lentes, sólo los meridianos principales poseen focal propia; el resto de los meridianos contribuye a la formación de dichas focales.

Conviene recordar que el principio de la compensación de ametropías consiste en que la lente forme la imagen en el punto remoto del sujeto amétrope, punto en que el sujeto es capaz de ver con nitidez en ausencia de acomodación. En el caso de un astígmata, la existencia de dos meridianos principales deriva en la aparición de dos puntos remotos. Por tanto, la misión de la lente oftálmica compensadora es, en este caso, formar las imágenes en ambos puntos remotos respectivamente con la finalidad de que el objeto sea visto nítidamente.

Las figuras 5.5 y 5.6 representan la refracción de una lente astigmática a lo largo de sus dos meridianos principales, localizados en los meridianos vertical y horizontal respectivamente. Al igual que en la figura 5.4, se puede observar que ambos meridianos son positivos, aunque es más potente el meridiano horizontal.

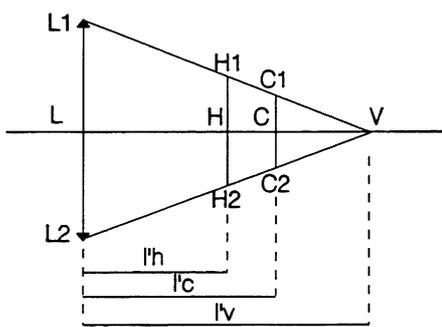


Fig. 5.5 Refracción a través del meridiano vertical de una lente astigmática

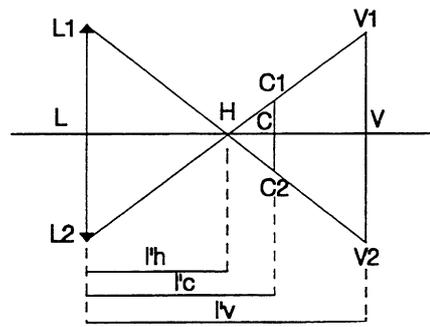


Fig. 5.6 Refracción a través del meridiano horizontal de una lente astigmática

Para un punto objeto situado en el eje óptico, la focal formada por el meridiano vertical (V_1V_2) está situada a una distancia $l'v$ de la lente, la focal formada por el meridiano horizontal (H_1H_2) está situada a una distancia $l'h$ de la lente y el círculo de menor confusión (C_1C_2) está situado a una distancia $l'c$ de la lente.

Considerando que los triángulos L_1L_2V y H_1H_2V son semejantes, se puede calcular el tamaño de la focal correspondiente al meridiano horizontal (H_1H_2):

$$H_1H_2 = \frac{P_H - P_V}{P_H} (L_1L_2) \tag{5.1}$$

donde L_1L_2 es el diámetro de la lente, P_H es la potencia horizontal ($1/l'h$) y P_V es la potencia vertical ($1/l'v$).

Del mismo modo, se puede calcular el tamaño de la focal correspondiente al meridiano vertical (V1V2) si se considera la semejanza existente entre los triángulos L_1L_2H y V_1V_2H :

$$V_1V_2 = \frac{P_H - P_V}{P_V} (L_1L_2) \quad (5.2)$$

Por último, la posición (l'_c) y el tamaño (C_1C_2) del círculo de menor confusión pueden también deducirse de la semejanza entre los triángulos L_1L_2V y C_1C_2V así como entre L_1L_2H y C_1C_2H :

$$l'_c = \frac{2}{P_H + P_V} \quad (5.3)$$

$$C_1C_2 = \frac{P_H - P_V}{P_H + P_V} (L_1L_2) \quad (5.4)$$

5.3 Lentes cilíndricas

88

Al seccionar un cilindro mediante un plano paralelo a su eje de revolución se obtiene una *lente cilíndrica* formada por dos superficies, una de las cuales es plana y la otra cilíndrica. Estas lentes, que reciben también la denominación de planocilíndricas, se utilizan para la compensación del astigmatismo cuando uno de los dos meridianos principales del ojo es emétrope.

Se denomina *meridiano de una lente cilíndrica* a la sección que se obtiene mediante la intersección de un plano cualquiera que pasa por el centro geométrico de la superficie cilíndrica.

En la figura 5.7 están representadas una lente cilíndrica positiva y una lente cilíndrica negativa. Como vemos a lo largo de la sección vertical AB la superficie cilíndrica es plana, mientras que en la sección CD presenta la máxima curvatura. Estas dos secciones perpendiculares entre sí constituyen los meridianos principales de la lente cilíndrica, denominados respectivamente *eje* y *contraeje*.

Según el eje de la lente la potencia es nula debido a que esta sección no es más que una lámina planoparalela. En cambio, según el contraeje la potencia es máxima (en valor absoluto), y se puede considerar como la de una lente planoesférica que tenga el mismo radio de curvatura que el cilindro.

A partir de todo lo anteriormente expuesto, es razonable pensar que un meridiano oblicuo cualquiera debe tener una potencia comprendida entre cero y la potencia del contraeje. Observando la figura 5.8, se puede apreciar que la curvatura según un meridiano XX' cualquiera que forma un ángulo θ con el eje, resulta ser elíptica. Para calcular la potencia de este meridiano oblicuo XX' , dado que en el caso de las lentes oftálmicas, el volumen de cilindro utilizado es pequeño, el arco elíptico correspondiente se puede aproximar a un arco de circunferencia. Partiendo de esta aproximación y considerando que la sagita s se mantiene constante para cualquier arco, utilizando la aproximación de Rayleigh se puede considerar:

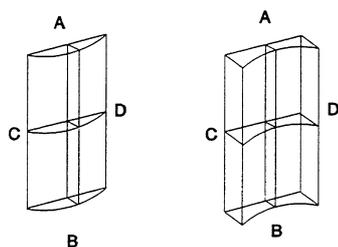


Fig. 5.7 Lente cilíndrica positiva y negativa

$$s = \frac{\overline{NQ}^2}{2r_c} = \frac{\overline{XQ}^2}{2r_\theta} \tag{5.5}$$

donde r_c es el radio del contraeje y r_θ es el radio del meridiano oblicuo, y dado que,

$$\frac{\overline{NQ}}{\overline{XQ}} = \text{sen}\theta \tag{5.6}$$

se puede llegar a la siguiente expresión:

$$r_c = r_\theta \text{sen}^2\theta \tag{5.7}$$

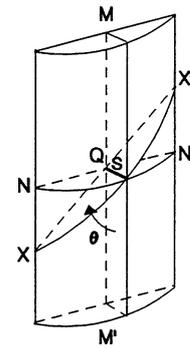


Fig. 5.8 Eje, contraeje y meridiano oblicuo de una lente cilíndrica

Si en lugar de curvaturas, se quiere relacionar potencias, se obtiene:

$$P_\theta = P_c \text{sen}^2\theta \tag{5.8}$$

La potencia P_θ de un meridiano cualquiera de la lente cilíndrica dependerá del ángulo θ que forme el meridiano considerado con el eje del cilindro y de la máxima potencia del mismo P_c (potencia del contraeje).

De esta manera, para toda pareja de meridianos perpendiculares entre sí, se cumple que:

$$P_{\theta \pm 90} = P_c \text{sen}^2(90 - \theta) = P_c \text{cos}^2\theta \tag{5.9}$$

Luego,

$$P_\theta + P_{\theta \pm 90} = P_c (\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta) = P_c \tag{5.10}$$

Por tanto, en una superficie cilíndrica, la suma algebraica de las potencias de dos meridianos ortogonales es constante e igual a la potencia del cilindro (potencia del contraeje).

En definitiva, tal y como muestra la figura 5.9, la imagen dada por una lente cilíndrica de un punto objeto situado en el infinito es una línea focal. En la figura 5.9, el eje de la lente cilíndrica está situado en el meridiano vertical, por lo que la línea focal está formada por la refracción de los rayos a través de las secciones horizontales de la lente, paralelas al contraeje de la misma. Cuando el diafragma es circular, la longitud de la línea focal es igual al diámetro de la apertura. Al seccionar el haz de rayos refracta-

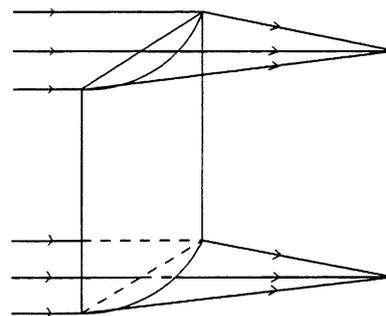


Fig. 5.9 Refracción a través de una lente cilíndrica positiva

do, se obtiene, para cualquier posición de la pantalla, una elipse que en la dirección del eje tiene el mismo tamaño que la línea focal, pero que en la dirección del contraeje disminuirá de tamaño a medida que nos acerquemos al plano focal. En este caso se trata de una imagen real puesto que se trata de una lente cilíndrica positiva, pero en una negativa la línea focal sería virtual. Una aplicación de las lentes cilíndricas en las pruebas optométricas son las conocidas varillas de Maddox.

Conviene recordar que el ojo astigmata presenta dos direcciones principales que han de coincidir con las de la lente oftálmica encargada de compensarlo. Para establecer la orientación de las lentes astigmáticas tan sólo es necesario fijar la dirección del eje de la lente.

De hecho, para representar lentes planocilíndricas, la fórmula óptica es la siguiente:

$$C \alpha^\circ$$

Consiste en indicar la potencia del contraeje del cilindro C, acompañada por la orientación del eje α° .

La notación universalmente utilizada para especificar la dirección del eje es conocida como notación TABO. Esta notación estándar considera que un determinado observador está siendo mirado por un sujeto que se coloca frente a él. El ojo derecho del sujeto se sitúa entonces frente al ojo izquierdo del observador, mientras que el ojo izquierdo del sujeto está situado frente al ojo derecho del observador.

Por esta razón en el diagrama representado en la figura 5.10, el ojo derecho se muestra a la izquierda y el ojo izquierdo a la derecha. La dirección del eje se especifica en grados, de manera que la orientación 0° se encuentra en el lado derecho de cada ojo, y se numera en sentido antihorario hasta 180° , que corresponderá al lado izquierdo de cada ojo. Por esta razón, el origen coincide con el lado nasal (N) del O.D. y con el lado temporal (T) del O.I. De esta forma, el meridiano horizontal viene representado por la orientación $0^\circ - 180^\circ$ y el meridiano vertical será el de 90° . Si se considera que los dos meridianos principales son perpendiculares entre sí, dada la orientación de un meridiano principal, el segundo meridiano principal resultará simplemente de adicionar o sustraer 90° al primero. Por ejemplo, si el eje está a 10° , el contraeje estará a 100° , o bien, si el eje está a 125° , el contraeje estará a 35° , etc.

90

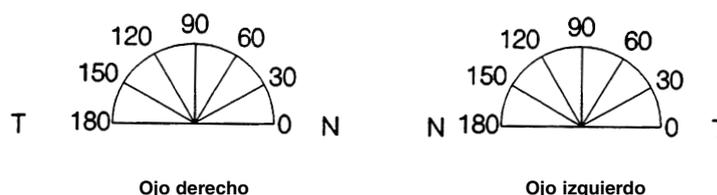


Fig. 5.10 Notación TABO

5.4 Lentes esferocilíndricas

Una lente esferocilíndrica está formada por dos superficies, una esférica y otra cilíndrica. Uno de sus meridianos principales está definido por el plano que contiene el eje de revolución de la cara cilíndrica y el centro geométrico de la cara esférica. El otro meridiano principal es el plano perpendicular al eje de revolución del cilindro que pasa por el centro geométrico de la cara esférica. Por analogía con las lentes planocilíndricas, a estos dos meridianos principales de la lente esferocilíndrica se les denomina *eje* y *contraeje* respectivamente.

En la figura 5.11 se puede observar que la lente esferocilíndrica, siguiendo la dirección del *eje*, se comporta como una lente planoesférica. Como en esa dirección la potencia de la superficie cilíndrica es nula, se tiene como potencia principal únicamente la potencia de la superficie esférica E. Por el contrario, en la dirección del *contraeje*, la potencia total es la suma de la potencia esférica y de la cilíndrica, es decir, E+C.

Se puede decir entonces que una lente esferocilíndrica viene definida como toda lente astigmática por sus dos *potencias principales*, P_{eje} y P_{ceje} , siendo $P_{eje} = E$ y $P_{ceje} = E+C$.

Una vez definidas las potencias y los meridianos principales, es necesario conocer la potencia que presenta cualquier otro meridiano de la lente.

La potencia de un cilindro en un meridiano cualquiera que forme un ángulo θ con el eje es:

$$P_{\theta} = P_c \text{sen}^2 \theta \tag{5.8}$$

De acuerdo con esto, y teniendo en cuenta que la potencia de una superficie esférica se mantiene constante para todos los meridianos, la *potencia P_{θ} de un meridiano cualquiera de la lente esferocilíndrica* vendrá dada por:

$$P_{\theta} = E + C \text{sen}^2 \theta \tag{5.11}$$

La fórmula óptica para representar una lente esferocilíndrica consiste en indicar la potencia esférica, la potencia cilíndrica y la dirección del eje del cilindro, de la forma siguiente:

$$E \ C \ \alpha^{\circ} \quad \text{o bien} \quad \alpha^{\circ} \ C \ E$$

A pesar de que no existe un convenio definido respecto al orden, sí se ha de mantener que la potencia cilíndrica sea siempre la que esté junto a la orientación del eje.

5.5 Lentes bicilíndricas

Las lentes bicilíndricas son lentes astigmáticas que se pueden considerar compuestas por dos lentes planocilíndricas unidas por sus caras planas. Estas lentes que, por tanto, poseen dos superficies cilíndricas, se formulan indicando los dos cilindros con sus ejes respectivos, unidos mediante el símbolo de combinación, de la siguiente manera:

$$C_1 \ \alpha_1^{\circ} \equiv C_2 \ \alpha_2^{\circ}$$

Aunque en principio los dos ejes α_1 y α_2 pueden formar entre sí un ángulo cualquiera, hay dos disposiciones particulares: que sean paralelos o que sean perpendiculares.

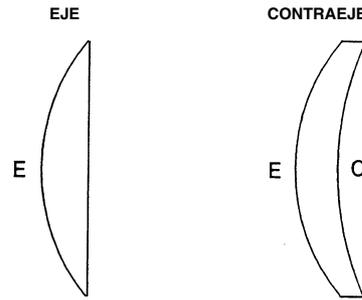


Fig. 5.11 Meridianos principales de una lente esferocilíndrica: eje (E) y contraeje (E + C)

Con ejes paralelos

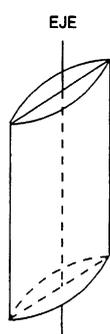


Fig. 5.12 Unión de dos lentes cilíndricas con ejes paralelos

Se puede decir que dos lentes planocilíndricas unidas por su cara plana con los ejes paralelos, son equivalentes a una lente planocilíndrica única cuyos meridianos principales, eje y contraeje, coinciden con los meridianos principales de las planocilíndricas componentes (figura 5.12). De esta forma la potencia siguiendo el eje de la lente bicilíndrica es cero, y la potencia del contraeje es igual a la suma algebraica de los cilindros

$$C_1 \alpha^\circ \approx C_2 \alpha^\circ \equiv C_3 \alpha^\circ$$

donde $C_3 = C_1 + C_2$.

Un caso particular se da cuando además de ejes paralelos, los cilindros poseen potencias iguales pero de signo contrario, pues la lente bicilíndrica equivale en este caso a una lente de potencia nula.

Con ejes perpendiculares

Cuando los ejes de las dos planocilíndricas que se combinan forman entre sí 90° . Un ejemplo de este tipo de lente es:

92

$$C_1 \alpha^\circ \approx C_2 \alpha^\circ \pm 90^\circ$$

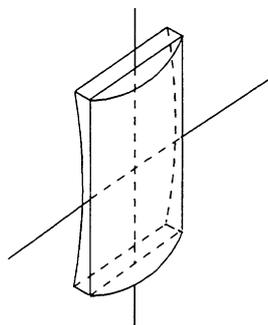


Fig. 5.13 Unión de dos lentes cilíndricas con ejes perpendiculares

El resultado es un sistema astigmático regular, donde el eje de una de las componentes coincide con el contraeje de la otra, como se puede observar en la figura 5.13. En cada meridiano principal, la lente bicilíndrica se comporta como una lente planoesférica. La potencia total de la lente en la dirección α° es C_2 , mientras que la potencia total en la dirección perpendicular $\alpha \pm 90^\circ$ es C_1 . Como ya veremos más adelante en el apartado de transposiciones, la lente bicilíndrica es equivalente a una lente esferocilíndrica con esas mismas potencias principales (C_1 y C_2), pues tendría el mismo comportamiento, si bien, evidentemente, no la misma forma.

Existe el caso particular de que las potencias de los cilindros sean iguales ($C_1 = C_2$), y en esa situación la lente bicilíndrica equivaldría diópticamente a una lente esférica.

En la práctica optométrica, las lentes bicilíndricas de ejes perpendiculares, con la particularidad de que $C_1 = -C_2$ y normalmente valores de $\pm 0,25$ D ó $\pm 0,50$ D, se denominan *cilindros cruzados* y se usan para ajustar el eje y la potencia de la componente cilíndrica de una prescripción, así como para determinar la posición del punto próximo en pacientes presbitas.

Con ejes formando un ángulo cualquiera

La combinación de dos lentes planocilíndricas de potencias C_1 y C_2 con sus ejes formando entre sí un ángulo cualquiera θ es equivalente a una lente esferocilíndrica determinada por el conocimiento de sus dos potencias principales P_{eje} y P_{ceje} , siguiendo respectivamente los dos meridianos principales.

Para resolver cuáles son estas potencias y direcciones principales se utiliza un método gráfico de análisis vectorial que considera los ángulos dobles. Consiste en representar dos vectores OC_1 y OC_2 , cuya longitud sea proporcional a las potencias de los cilindros C_1 y C_2 , como muestra la figura 5.14, donde el ángulo 2θ es el doble del ángulo que forman entre sí los ejes de los cilindros.

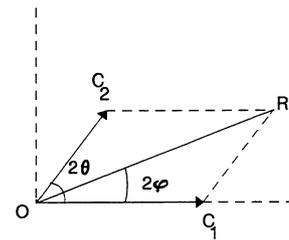


Fig. 5.14

Si se construye el paralelogramo correspondiente a estos dos vectores y se traza su diagonal OR, la longitud de la diagonal será la representación vectorial de la resultante cilíndrica, y el ángulo 2θ será igual a dos veces el ángulo entre el eje del cilindro resultante y el eje de C_1 .

Luego, partiendo de la combinación de dos planocilíndricas, al construir un paralelogramo de este tipo, la diagonal corresponde al cilindro C de la esferocilíndrica equivalente, y el ángulo θ permite conocer la posición de sus dos meridianos principales.

Al proyectar OR sobre el eje horizontal se tiene:

$$\overline{OR} \cos 2\varphi = \overline{OC_1} + \overline{OC_2} \cos 2\theta \tag{5.12}$$

$$C \cos 2\varphi = C_1 + C_2 \cos 2\theta \tag{5.13}$$

Si ahora se proyecta OR sobre el eje vertical se obtiene:

$$OR \sen 2\varphi = OC_2 \sen 2\theta \tag{5.14}$$

$$C \sen 2\varphi = C_2 \sen 2\theta \tag{5.15}$$

Dividiendo la expresión (5.13) entre la (5.15) se obtiene:

$$tg 2\varphi = \frac{C_2 \sen 2\theta}{C_1 + C_2 \cos 2\theta} \tag{5.16}$$

donde el ángulo φ representa la posición del eje del cilindro resultante medido desde el eje del cilindro C_1 , en sentido antihorario si es positivo y al contrario, si es negativo.

Por otra parte despejando de la ecuación 5.15, se obtiene la potencia del cilindro resultante que viene dada por:

$$C = \frac{C_2 \operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen} 2\varphi} \tag{5.17}$$

Elevando al cuadrado las expresiones (5.13) y (5.15), y sumándolas, se obtiene:

$$C^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos 2\theta \tag{5.18}$$

donde, para obtener el cilindro no es necesario conocer el ángulo φ .

La utilización de este método gráfico impone una serie de condiciones:

- a) ambos cilindros deben tener el mismo signo, para que el eje del cilindro resultante se sitúe entre los ejes de los cilindros C_1 y C_2 ;
- b) C_1 corresponderá al cilindro cuyo eje esté más próximo a 0° TABO.

Ahora es necesario deducir una expresión matemática que determine la componente esférica de la esferocilíndrica resultante. Tal expresión se puede deducir a partir del diagrama que se muestra en la figura 5.15.

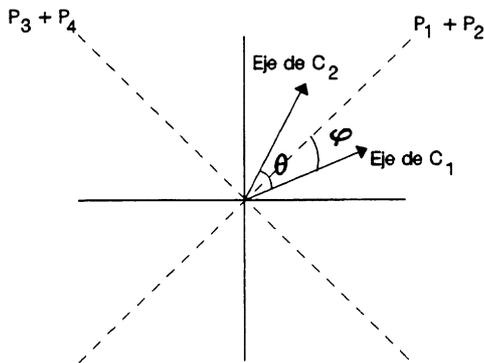


Fig. 5.15

En este diagrama, las líneas discontinuas son perpendiculares entre sí y representan los meridianos principales de la lente esferocilíndrica resultante. Como ya se vio en el apartado 5.2, para cualquier cilindro se cumple que la suma algebraica de dos meridianos ortogonales es igual a la potencia del contraeje.

En primer lugar, consideremos que el cilindro C_1 presenta en dichos meridianos ortogonales las potencias P_1 y P_3 , por lo que:

$$P_1 + P_3 = C_1 \tag{5.19}$$

y si el cilindro C_2 contribuye con las potencias P_2 y P_4 :

$$P_2 + P_4 = C_2 \tag{5.20}$$

entonces se tiene que:

$$P_1 + P_3 + P_2 + P_4 = C_1 + C_2 \tag{5.21}$$

Por tanto, la combinación de P_1 y P_2 dará lugar a una de las potencias principales de la esferocilíndrica resultante P_{eje} , mientras que la combinación de P_3 y P_4 dará lugar a la otra potencia principal P_{ceje} . Suponiendo $E = P_{eje}$ y como en ese caso $E + C = P_{ceje}$,

$$E = P_1 + P_2 \tag{5.22}$$

$$E + C = P_3 + P_4 \tag{5.23}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$E + (E + C) = C_1 + C_2 \tag{5.24}$$

$$2E + C = C_1 + C_2 \tag{5.25}$$

$$E = \frac{C_1 + C_2 - C}{2} \tag{5.26}$$

Este método se puede emplear de la misma forma para calcular la combinación de esferocilíndricas, teniendo en cuenta que a la potencia de la esfera resultante se le deben adicionar las componentes esféricas de las fórmulas esferocilíndricas de partida.

Ejemplo:

Dadas las lentes (+3.50) 30° y (-3.00)(+3.00) 50°, calcular la lente esferocilíndrica equivalente a la combinación de ambas.

En primer lugar, para poder aplicar el método anteriormente expuesto, las lentes que se combinan deben tener los cilindros del mismo signo, ambos positivos o ambos negativos. El caso que nos ocupa responde a esta combinación y si no fuera así debería realizarse una transposición (véase apartado 5.8).

Los dos cilindros están representados mediante el diagrama vectorial de la figura 5.16. El vector C_1 de longitud 3,5 unidades, corresponde al cilindro cuyo eje está más cerca de 0° TABO y está representado sobre el eje horizontal. El vector C_2 , de longitud 3 unidades, forma un ángulo 2θ con el primero, siendo $\theta = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$, ángulo entre los ejes.

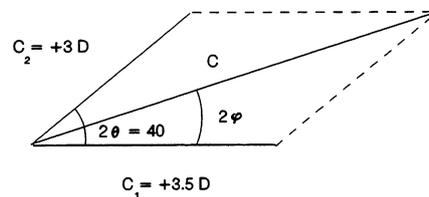


Fig. 5.16

Si calculamos el ángulo 2θ tenemos:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{C_2 \operatorname{sen} 2\theta}{C_1 + C_2 \operatorname{cos} 2\theta} = \frac{3 \operatorname{sen} 40}{3,5 + 3 \operatorname{cos} 40} = 0,3325$$

$$2\varphi = 18,4^\circ$$

$$\varphi = 9,2^\circ$$

La componente cilíndrica resultante vendría dada por:

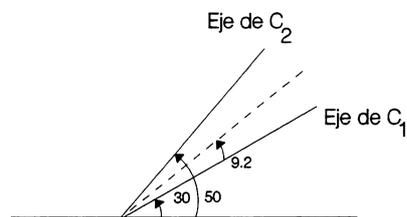


Fig. 5.17

$$C = \frac{C_2 \operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen} 2\varphi} = \frac{3 \operatorname{sen} 40}{\operatorname{sen} 18,4} = 6,11 D$$

y la componente esférica sería:

$$E = \frac{C_1 + C_2 - C}{2} = \frac{3,5 + 3 - 6,11}{2} = + 0,195 D$$

A este valor (+ 0,195 D) habría entonces que sumarle las esferas de las lentes originales (-3 D), con lo que la potencia esférica total resultaría de -2,805 D.

La esferocilíndrica resultante de la combinación de estas dos lentes tiene una potencia de:

$$(-2.805) (+6.11) 39.2^\circ \text{ o aproximadamente } (-2.75) (+6) 39^\circ$$

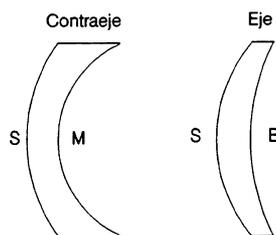
La figura 5.17 presenta el diagrama que muestra gráficamente los resultados obtenidos.

5.6 Lentes esferotóricas

La combinación de una superficie esférica con una tórica da como resultado una lente esferotórica. Existen dos posibilidades: que el toroide esté situado en la primera cara de la lente (la más alejada del ojo) o bien que el toroide esté en el lado ocular. En el primer caso se trataría de una lente *tórica externa* y en el segundo de una *tórica interna*.

Los meridianos principales de una lente esferotórica son los meridianos principales del dioptrio tórico, denominados *ecuador* y *meridiano*, y para ello es necesario colocar el centro de curvatura de la superficie esférica en la intersección de ambos meridianos.

Se denomina *base de una lente tórica* a la potencia principal de la cara tórica que es menor en valor absoluto, es decir, la correspondiente al mayor radio de curvatura (nótese el paralelismo existente con la definición de base de una lente esférica). Para los toroides en anillo y en calabaza la base está en el ecuador y para los toroides en corsé y en barril sucede lo contrario: la base está en el meridiano.



LENTE TÓRICA INTERNA

Fig. 5.18 Meridianos principales de una lente esferotórica

Análogamente a las superficies cilíndricas, que presentan potencia nula a lo largo del eje, el eje de un dioptrio tórico se define como aquella sección principal cuya potencia es la base. Por ello, denominaremos *eje* y *contraeje de una lente tórica*, al eje y contraeje del dioptrio tórico.

Como se puede observar en la figura 5.18, en una lente tórica cada meridiano principal por separado puede ser asimilado a una lente esférica.

Según la dirección del *eje* la potencia de la lente será la suma algebraica de la potencia esférica y de la base, $S + B$. Mientras que, según la dirección del *contraeje*, la potencia vendrá dada por la suma de la esfera y de la potencia tórica mayor en valor absoluto, $S + M$.

En definitiva, como cualquier lente astigmática, la lente tórica viene determinada por sus dos potencias principales Peje y Pceje, con Peje = S + B y Pceje = S + M.

Una vez definidas las potencias principales de la lente tórica, es el momento de abordar la potencia que presentará la lente en cualquier sección oblicua. Para ello, hay que tener en cuenta la posibilidad de considerar el dioptrio tórico como resultado de la combinación de dos cilindros cruzados, una de potencia M y otro de potencia B.

De acuerdo con esto, la potencia oblicua de cada uno de estos cilindros será:

$$M_{\theta} = M \text{sen}^2 \theta \tag{5.27}$$

$$B_{\theta} = B \text{sen}^2 (90 - \theta) = B \text{cos}^2 \theta \tag{5.28}$$

Por lo tanto, la potencia P_{θ} de un meridiano cualquiera de la lente esferotórica vendrá dada por la potencia esférica, a la que se le debe adicionar la contribución M_{θ} y B_{θ} de cada uno de los cilindros, de la siguiente manera:

$$P_{\theta} = S + M \text{sen}^2 \theta + B \text{cos}^2 \theta \tag{5.29}$$

La fórmula óptica que se utiliza para identificar a este tipo de lentes es:

$$S \ M \ \alpha^{\circ} \ \text{base } B$$

donde S representa la potencia de la superficie esférica, M la potencia tórica en el contraeje, α la orientación del eje y B la potencia tórica en el eje (base), cuyo valor generalmente aparece en módulo.

Otras formas de representar las lentes esferotóricas son: la cruz óptica (figura 5.19), el diagrama óptico (figura 5.20) y el esquema óptico (figura 5.21), este último aplicado fundamentalmente en fabricación.

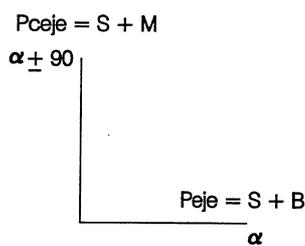


Fig. 5.19 Representación de una lente esferotórica con la denominada cruz óptica

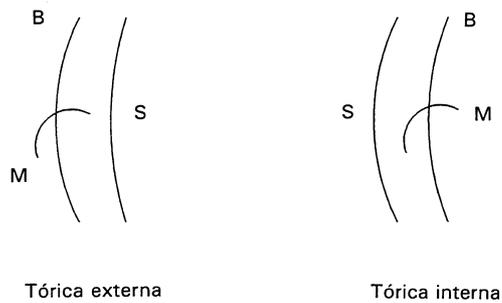


Fig. 5.20 Diagrama óptico de una lente esferotórica

En las figuras 5.22, 5.23 y 5.24 aparecen estas mismas formas de representación para el caso particular de una lente esferocilíndrica, cuya fórmula viene dada por:

$$E \text{ C } \alpha^\circ$$

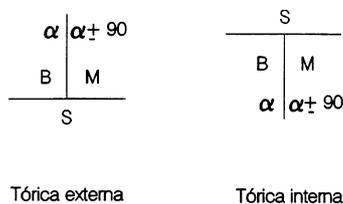


Fig. 5.21 Esquema óptico de una lente esferotórica

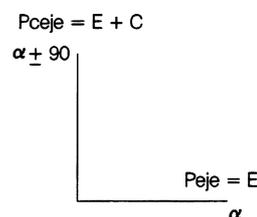


Fig. 5.22 Representación de una lente esferotórica mediante la cruz óptica

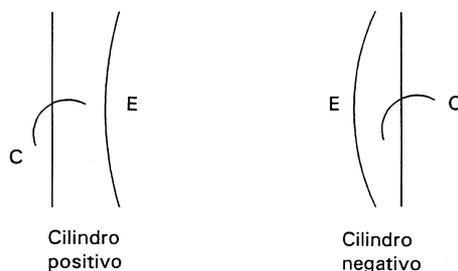


Fig. 5.23 Diagrama óptico de una lente esferocilíndrica

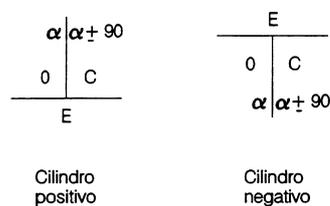


Fig. 5.24 Esquema óptico de una lente esferocilíndrica

98

5.7 Espesores en lentes astigmáticas

Las lentes astigmáticas presentan una diferencia de potencia entre los meridianos principales que se traduce en una variación del espesor en el borde de la lente, ya que éste no permanece constante como en el caso de lentes esféricas, sino que pasa de un mínimo a un máximo de forma gradual.

En este apartado se va a estudiar cómo varía el espesor en las lentes astigmáticas atendiendo a su forma. Se analizará cómo, independientemente de la forma de la lente, los espesores de borde mínimo y máximo se corresponden con los meridianos principales de la misma, concretamente con el de mayor y menor potencia algebraica respectivamente.

Espesor de lentes planocilíndricas

En el caso de lentes planocilíndricas, como se puede observar en la figura 5.25, el espesor a lo largo del eje de la lente se mantiene constante, desde el centro hasta el borde. Por el contrario, en el contraeje el espesor varía desde el centro hasta el borde, de la misma forma que lo hace en una lente esférica.

ca. En una planocilíndrica positiva el espesor disminuye cuando nos alejamos del centro y en una planocilíndrica negativa aumenta.

Si el cilindro tiene un radio de curvatura r_c , la sagita para cualquier sección paralela al contraeje se calcularía mediante la expresión:

$$s = r_c - \sqrt{r_c^2 - x^2} \tag{5.30}$$

donde x correspondería a la mitad de la apertura o diámetro de la lente. Conociendo esta sagita ya se podrían relacionar los espesores de borde y de centro de la lente.

Sin embargo, ocasionalmente también es necesario conocer el espesor en un meridiano oblicuo cualquiera. Supongamos que se desea calcular el espesor en el punto Q (figura 5.26), situado en el meridiano HH', cuya curvatura es elíptica. Este espesor resultará de restarle al espesor de centro, la sagita de la curva HH' con apertura 2 PQ.

Si asumimos que en el caso de las lentes oftálmicas el arco de elipse se puede considerar aproximadamente como un arco de circunferencia, dicha sagita vendría dada por:

$$s' = r_\theta - \sqrt{r_\theta^2 - PQ^2} \tag{5.31}$$

donde:

$$r_\theta = \frac{r_c}{\text{sen}^2\theta} \tag{5.32}$$

Por tanto, podemos decir que en una lente cilíndrica los dos meridianos principales se corresponden con las secciones de mayor y menor espesor de borde. En un cilindro positivo el eje representa el meridiano de mayor espesor de borde y el contraeje el de menor, mientras que en un cilindro negativo sucede lo contrario.

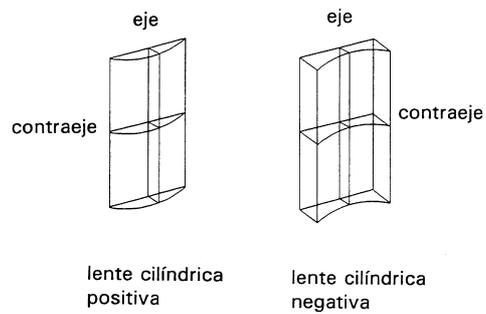


Fig. 5.25

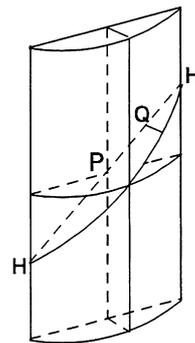


Fig. 5.26

Espesor de lentes esferocilíndricas

No se debe olvidar que estas lentes se pueden considerar como el resultado de la combinación de una lente planoesférica y una lente planocilíndrica, ambas unidas por sus caras planas. De acuerdo con esto y considerando que la sagita de la superficie esférica se mantiene constante para cualquier sección de la lente, podemos deducir que la variación del espesor en el borde de la lente viene determinada por la superficie cilíndrica.

Por ello en una lente esferocilíndrica con *cilindro convexo* $C > 0$, el eje que presenta una potencia E , tendrá el espesor de borde máximo, mientras que al contraeje, que tiene una potencia $E + C$, le corresponderá el mínimo espesor de borde.

De la misma forma, en una lente esferocilíndrica con *cilindro cóncavo* $C < 0$, el menor espesor de borde estará en el eje, de potencia E , y el mayor espesor de borde corresponderá al contraeje, de potencia $E + C$, ya que en este caso $E + C < S$.

Espesor en lentes esferotóricas

En cada una de las dos secciones principales de una lente tórica la variación del espesor desde el centro hasta el borde es similar a la que se produciría en el caso de una lente esférica.

Si se limita el estudio a las lentes oftálmicas que se fabrican para la compensación del astigmatismo ocular, debemos considerar que se trata tan sólo de lentes que tienen forma de menisco, pues como se verá más adelante, son las que proporcionan la calidad óptica necesaria. Dichas lentes presentan la primera superficie positiva y la segunda negativa, aunque pueden ser en cualquier caso tóricas internas o externas.

Esto implica que, cuando la lente es tórica externa, las dos potencias principales del toroide, M y B , sean positivas y la potencia esférica S negativa, mientras que si la lente es tórica interna, los términos se invierten.

La figura 5.27 representa las dos secciones principales de una lente *tórica externa*. Como se puede apreciar, la curvatura de la primera superficie en el eje es menor, puesto que $|B| < |M|$. Por ello, a pesar de que la curvatura en la segunda superficie se mantiene constante, el espesor de borde es máximo en el eje y mínimo en el contraeje.

Lo contrario sucede para la *tórica interna* (figura 5.28), donde es la curvatura de la primera superficie la que no varía. La segunda superficie es menos curva en el eje, por lo que el máximo espesor de borde se encuentra en el contraeje.

En ambos casos, es el meridiano más positivo el que presenta menor espesor de borde y viceversa, tal y como sucede en el resto de lentes astigmáticas.

100

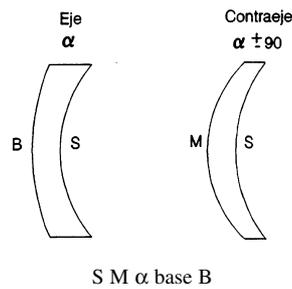


Fig. 5.27

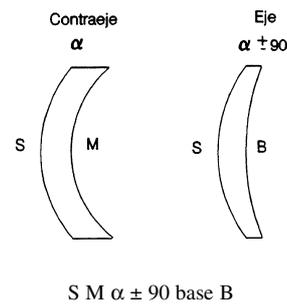


Fig. 5.28

5.8 Reglas de transposición

El astigmatismo ocular se compensa como una ametropía doble, teniendo en cuenta que las secciones principales de la lente astigmática deben coincidir con las del ojo. Podemos apreciar entonces que, para tal compensación, pueden emplearse igualmente tanto lentes cilíndricas como lentes tóricas, siempre que sus potencias principales sean las mismas y sus secciones principales estén orientadas siguiendo la misma dirección.

Históricamente las lentes cilíndricas fueron introducidas por Galland y Chamblant en 1813, y su empleo data de mediados del siglo XIX. Las lentes tóricas fueron posteriores, se difundieron a

finales del siglo XIX, y debido a la calidad óptica que aportan, son las que se fabrican actualmente en el ámbito de la óptica oftálmica. Para la compensación de una determinada ametropía tendremos pues diferentes soluciones. Será posible emplear lentes con formas diversas, pero todas ellas equivalentes, en cuanto a potencia se refiere.

La *transposición* es simplemente el proceso que nos permitirá encontrar una lente de forma distinta a una dada, pero equivalente a ésta, es decir, con las mismas potencias y meridianos principales. Para poder llevar a cabo este proceso es conveniente seguir una serie de reglas o normas que van a ser detalladas paso a paso a lo largo de este apartado.

Transposición en lentes cilíndricas

a) Paso de esferocilíndrica a bicilíndrica:

Partiendo de la esferocilíndrica $E C \alpha^\circ$,

1. escoger como primer cilindro la esfera de la forma esferocilíndrica, tomando como eje la orientación que forma ángulo recto con el eje del cilindro de la forma esferocilíndrica:

$$C_1 = E \rightarrow C_1 \alpha \pm 90^\circ$$

2. escoger como segundo cilindro la suma algebraica de la esfera y el cilindro de la forma esferocilíndrica, tomando como eje el mismo eje del cilindro de la forma esferocilíndrica:

$$C_2 = E + C \rightarrow C_2 \alpha^\circ$$

El resultado será:

$$\begin{aligned} E \alpha \pm 90^\circ &\simeq (E + C) \alpha^\circ \\ C_1 \alpha \pm 90^\circ &\simeq C_2 \alpha^\circ \end{aligned}$$

b) Paso de bicilíndrica a esferocilíndrica:

Partiendo de la bicilíndrica $C_1 \alpha \pm 90^\circ \simeq C_2 \alpha^\circ$,

1. escoger cualquiera de los dos cilindros como esfera:

$$E = C_1$$

2. el cilindro de la forma esferocilíndrica resultará de sustraerle al otro cilindro, el que se ha escogido como esfera:

$$C = C_2 - C_1$$

3. el eje de la forma esferocilíndrica será el mismo eje del cilindro que no hemos escogido como esfera.

El resultado será:

$$C_1 (C_2 - C_1) \alpha^\circ \rightarrow E C \alpha^\circ \quad \text{o bien}$$

$$C_2 (C_1 - C_2) \alpha \pm 90^\circ \rightarrow E' C' \alpha \pm 90^\circ$$

c) Paso de una esferocilíndrica a otra:

Partiendo de la esferocilíndrica $E C \alpha^\circ$,

1. la nueva esfera será la suma algebraica de la esfera y el cilindro de la esferocilíndrica de partida:

$$E' = E + C$$

2. el nuevo cilindro será el cilindro de la esferocilíndrica de partida con el signo cambiado:

$$C' = -C$$

3. el nuevo eje formará ángulo recto con el eje de la esferocilíndrica de partida. El resultado será:

$$(E + C) (-C) \alpha \pm 90^\circ$$

$$E' C' \alpha \pm 90^\circ$$

102

Ejemplo:

Conociendo las potencias y direcciones que determinan la compensación de un ojo astigmata, se pueden encontrar las tres realizaciones cilíndricas que compensarían dicha ametropía.

Supongamos que son necesarias +2 D para compensar el meridiano de 0° y +4 D para el de 90° . Las tres formas cilíndricas posibles serían:

— Forma bicilíndrica: $(+2) 90^\circ \approx (+4) 0^\circ$

— Formas esferocilíndricas: $(+2) (+2) 0^\circ$
 $(+4) (-2) 90^\circ$

Por tanto, tenemos una lente bicilíndrica y dos esferocilíndricas que satisfacen la prescripción. De las dos formas esferocilíndricas, se denomina *esferocilíndrica regular* a aquella cuya esfera es menor en valor absoluto. La otra forma esferocilíndrica será la *esferocilíndrica transpuesta*.

Transposición en lentes tóricas

Para especificar unas determinadas reglas que faciliten la transposición en lentes tóricas, es necesario fijar previamente la base.

a) Paso de esferocilíndrica a esferotórica de base B:

Partiendo de la esferocilíndrica $E C \alpha^\circ$,

1. transponer la forma esferocilíndrica hasta que su cilindro tenga el mismo signo que el de la base; es decir, se ha de cumplir:

$$B < 0 \rightarrow C < 0, \text{ o bien} \\ B > 0 \rightarrow C > 0$$

2. la esfera de la esferotórica resultará de restar la esfera de la esferocilíndrica menos la base:

$$S = E - B$$

3. la potencia de la superficie tórica en el contraeje se obtendrá al adicionar la base y el cilindro de la esferocilíndrica:

$$M = B + C$$

4. el eje de la esferotórica coincidirá con el eje de la esferocilíndrica.
El resultado será:

$$(E - B) (B + C) \alpha^\circ \text{ base } B \\ S M \alpha^\circ \text{ base } B$$

b) Paso de esferotórica de base B a esferocilíndrica:

Partiendo de la esferotórica $S M \alpha^\circ$ base B,

103

1. la esfera de la esferocilíndrica será la suma algebraica de la base más la esfera de la esferotórica:

$$E = S + B$$

2. el cilindro de la esferocilíndrica resultará de restarle a la potencia de la superficie tórica en el contraeje, la base:

$$C = M - B$$

3. el eje será el mismo en ambas lentes.
El resultado será:

$$(S + B) (M - B) \alpha^\circ \\ E C \alpha^\circ$$

c) Paso de una esferotórica a otra:

Partiendo de la esferotórica $S M \alpha^\circ$ base B,

1. la nueva esfera será la suma algebraica de la esfera, más la potencia de la superficie tórica en el contraeje, más la base de la esferotórica de partida:

$$S' = S + M + B$$

2. la nueva potencia de la superficie tórica en el contraeje vendrá dada por la de la esferotórica de partida con el signo cambiado:

$$M' = -M$$

3. la nueva base será la misma pero de distinto signo:

$$B' = -B$$

4. el nuevo eje formará ángulo recto con el eje de la esferotórica de partida.

El resultado será:

$$(S + M + B) (-M) \alpha \pm 90^\circ \text{ base } -B,$$

$$S' M' \alpha \pm 90^\circ \text{ base } B'$$

No debemos olvidar que todas estas reglas o normas de transposición, cuya aplicación parece a priori bastante complicada, se obtienen simplemente de igualar, en todas las lentes que son equivalentes entre sí, la potencia y la orientación de cada uno de los meridianos principales.

Partiendo de la base de que en todas estas lentes los dos meridianos principales siguen las mismas direcciones y tienen las mismas potencias, el resto consiste en adicionar para cada orientación particular las potencias de las dos superficies de cada lente e igualar a un mismo resultado final.

104

Ejemplo:

De igual modo que en el ejemplo anterior, conociendo las potencias y direcciones que determinan la compensación de un ojo astigmata, se pueden encontrar todas las realizaciones cilíndricas y tóricas que compensarían dicha ametropía.

Supongamos que son necesarias -1 D para compensar el meridiano de 30° y -5 D para el de 120° .

Las tres formas cilíndricas posibles serían:

— Forma bicilíndrica:	$(-1) 120^\circ \approx (-5) 30^\circ$
— Forma esferocilíndrica regular:	$(-1) (-4) 30^\circ$
— Forma esferocilíndrica transpuesta:	$(-5) (+4) 120^\circ$

Las dos formas tóricas posibles serían:

— Forma esferotórica a partir de la esferocilíndrica regular:	$(+5) (-10) 30^\circ \text{ base } -6$
— Forma esferotórica a partir de la esferocilíndrica transpuesta:	$(-11) (+10) 120^\circ \text{ base } +6$

Podemos definir la *esferotórica regular* como aquella esferotórica cuya base tiene el mismo signo que el cilindro de la esferocilíndrica regular equivalente y cuyo eje está orientado a los mismos grados.

La lente *esferotórica transpuesta* será entonces la que cumpla estas mismas condiciones con respecto a la esferocilíndrica transpuesta equivalente.

Habitualmente, a pesar de que las lentes compensadoras astigmáticas se fabrican atendiendo a formas esferotóricas, suelen caracterizarse mediante fórmulas esferocilíndricas. De hecho, tanto las prescripciones, como las tarifas de los fabricantes vienen dadas en fórmulas esferocilíndricas; de ahí la importancia de saber pasar de una forma a su equivalente con facilidad.

5.9 Cálculo exacto de lentes astigmáticas

Cuando el espesor de una lente oftálmica es pequeño, como sucede en el caso de lentes negativas y también en lentes positivas de hasta aproximadamente +3 D, el error que se comete al utilizar, que la potencia total de la lente o de uno de sus meridianos (lentes astigmáticas) es igual a la suma de las potencias de sus superficies, puede ser despreciable.

En la práctica, sin embargo, la lente siempre presenta un espesor determinado que es necesario tener en cuenta: no basta con sumar directamente las potencias de sus superficies, sino que hay que realizar el cálculo exacto, lo que es particularmente importante para la fabricación de la lente.

Se pueden definir diversas formas de medir la potencia considerando el espesor de la lente; no obstante, como ya vimos en el capítulo de lentes esféricas, en la práctica la que se emplea de forma habitual es la potencia frontal posterior imagen. Además, en particular para lentes astigmáticas, la potencia frontal presenta una ventaja importante, ya que para las dos secciones principales el origen considerado es el vértice posterior de la lente. En cambio, si se trabaja con la potencia verdadera, ésta se encuentra referida al plano principal imagen, cuya posición difiere para cada meridiano.

En el ejemplo que se expone a continuación queda patente la diferencia que existe al realizar el cálculo exacto de una lente astigmática considerada como gruesa.

Ejemplo:

Se quiere fabricar una lente astigmática de potencia frontal (+10) (+2) 50°, con una potencia de segunda superficie de -4 D, un espesor de centro de 6 mm y en un material de índice $n = 1,523$. Calcular de qué lente se trata.

Según la fórmula esferocilíndrica:

$$P'f^{50} = +10 D \text{ y } P'f^{140} = +12 D$$

la potencia nominal se puede deducir de la expresión:

$$P'f = P_{1N} + P_2$$

donde $P_2 = -4 D$, luego $P_{1N}^{50} = +14 D$ y $P_{1N}^{140} = +16 D$.

Por tanto, despreciando el espesor, la lente que satisface las condiciones iniciales es la esferotórica:

$$(-4) (+16) 50^\circ \text{ base } +14$$

Sin embargo, si la consideramos como lente gruesa, donde

$$P_{1N} = g' P_1 = \frac{P_1}{1 - \frac{e_c}{n} P_1}$$

obtendremos:

$$P_1^{50} = +13,27 D \text{ y } P_1^{140} = +15,05 D$$

Al realizar el cálculo exacto, la lente esferotórica obtenida es:

$$(-4) (+15) 50^\circ \text{ base } +13,25$$

Si la lente se hubiese fabricado con las potencias obtenidas en primer lugar, es decir, $P_1^{50} = +14 D$ y $P_1^{140} = +16 D$, al tener en cuenta el espesor, las potencias frontales serían:

$$P'f_{140^\circ} = \frac{16}{1 - \frac{0,006}{1,523} 16} - 4 = + 13,08 D$$

$$P'f_{50^\circ} = \frac{14}{1 - \frac{0,006}{1,523} 14} - 4 = + 10,82 D$$

Por lo que la fórmula esferocilíndrica vendría dada por:

$$(+10.75) (+2.25) 50^\circ$$

106

5.10 Efecto cilíndrico

Uno de los efectos ópticos que caracteriza propiamente a las lentes astigmáticas es el efecto cilíndrico o movimiento pendular que se puede observar en la figura 5.29. Aparece cuando se observa una mira a través de una lente astigmática, de forma que si se hace girar la lente en su plano, la imagen de la mira parece inclinarse, bien en el mismo sentido (*efecto cilíndrico directo*) o bien en sentido contrario (*efecto cilíndrico inverso*) con respecto al del giro de la lente.

Mediante este movimiento aparente se pueden determinar los meridianos principales, que se sitúan en las dos posiciones de la lente, perpendiculares entre sí, para las cuales la imagen de la línea tomada como mira aparece superpuesta a su posición original.

Además, el hecho de que cada meridiano principal de una lente astigmática se comporte como una lente esférica nos permite conocer por medio del efecto esférico si se trata de un meridiano de potencia positiva o negativa.

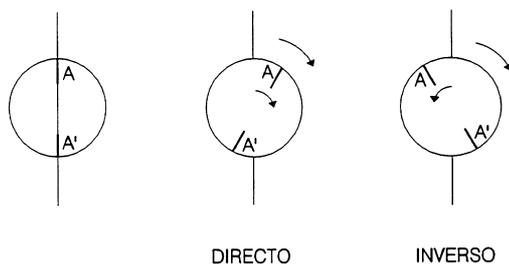


Fig. 5.29

5.11 Medida de lentes astigmáticas

En el caso de las lentes astigmáticas, el fronto-focómetro proporciona la medida de las potencias frontales correspondientes a los dos meri-

dianos principales de la lente, pero no da información alguna sobre la curvatura de las superficies, es decir, no determina si se trata de una lente cilíndrica o tórica.

El enfoque del test se consigue en dos direcciones perpendiculares entre sí, donde la imagen del test aparece nítida pero deformada. En realidad, lo que se observa, corresponde a las dos focales del haz astigmático refractado por la lente.

Una vez colocada la lente sobre la concha de apoyo del frontofocómetro, para obtener las dos lecturas que corresponden a las potencias principales de la lente, hay que desplazar el test así como variar su orientación. Esto se consigue girando respectivamente la rueda de enfoque y el mando que se encarga de girar el test hasta conseguir alcanzar una de las dos posiciones de máxima nitidez, es decir, hasta lograr enfocar una de las dos focales.

Si se considera, por ejemplo, el test más generalizado, que consiste en una cruz y un círculo formado por puntos, cuando su orientación y posición sean las correctas, la imagen de cada uno de esos puntos será una recta cuyo tamaño varía en función del astigmatismo de la lente. En tal caso, se estará enfocando una de las dos focales, la cual debe estar perfectamente centrada en el retículo para que la lectura sea correcta (figura 5.30a). El centrado se realiza girando la parte móvil del retículo hasta que uno de los brazos de la cruz quede paralelamente centrado en la imagen del test, que como ya se ha citado no estará formada por puntos, sino por líneas. En ese momento la escala dióptrica marcará la potencia frontal de uno de los meridianos principales.

Después de obtener una de las lecturas, para enfocar la otra focal basta con girar la rueda de enfoque para modificar la posición del test, no su orientación. De esta forma se observa de nuevo la imagen del test nítida, constituida en este caso por rectas perpendiculares a las anteriores (figura 5.30b). Una vez centrado el test, se procede a la lectura de la potencia frontal del segundo meridiano principal de la lente. El astigmatismo viene dado por la diferencia entre las dos potencias frontales medidas.

Ahora bien, para obtener la fórmula óptica de la lente problema, es necesario considerar que cuando se observa una línea vertical, ésta constituye la focal imagen del meridiano horizontal. Así pues, ya que las dos posiciones nítidas del test son las focales de Sturm, se puede decir que la observación de una focal enfocada permite conocer la potencia del meridiano perpendicular a la orientación dicha focal. Por ejemplo, si se considera que los meridianos principales se encuentran situados a 0° y 90° (como muestra la figura 5.30) cuando se observe la línea horizontal, se estará viendo la focal imagen del meridiano vertical y, por tanto, la medida corresponderá a la potencia frontal de dicho meridiano. De la misma forma, al observar la línea vertical, la potencia que se obtiene es la del meridiano horizontal de la lente.

A partir de las dos lecturas dadas por el frontofocómetro, la fórmula óptica de la lente, en su forma esferocilíndrica regular, se obtiene de la forma siguiente:

- se toma como esfera la primera lectura que siempre será la de menor potencia en valor absoluto;
- el valor del cilindro se obtiene restando a la segunda lectura el valor de la primera;
- el eje del cilindro tiene la misma orientación en grados que la focal observada nítidamente al realizar la segunda lectura, correspondiente a la mayor potencia en valor absoluto.

Según el ejemplo de la figura 5.30:

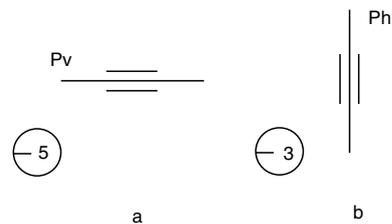


Fig. 5.30 Imagen del test dada por el frontofocómetro al medir una lente astigmática

$$E = P_0 = 3 D \quad C = P_{90} - P_0 = 2 D \quad \text{eje} = 0^\circ$$

$$(+3.00) (+2.00) 0^\circ$$

A partir de aquí, y por medio de las transposiciones, se puede expresar la lente en cualquiera de sus formas.

5.12 Orientación y marcado de lentes astigmáticas

Las operaciones previas al montaje de las lentes oftálmicas, tales como la comprobación de su potencia, así como la posterior orientación y marcado, se realizan por medio del frontofocómetro.

Una vez obtenida la lente compensadora para un determinado ojo amétrope, y a partir de su fórmula óptica, se pueden conocer tanto las potencias de sus meridianos principales, que se corresponden con las dos lecturas que dará el frontofocómetro, como la orientación a la cual debe ser colocada la lente para satisfacer la prescripción. Si tomamos la fórmula de la lente en su forma esferocilíndrica, una lectura es la esfera y la otra es la potencia resultante de sumar algebraicamente la esfera y el cilindro. La orientación en grados la da el eje.

$$E \ C \ \alpha^\circ$$

$$P \ \alpha^\circ = E \quad P \ \alpha \pm 90^\circ = E + C$$

108

En primer lugar, una vez conocidas las potencias, y tras colocar la lente problema apoyada por su cara cóncava en la concha de apoyo, se procede a orientar el test según los meridianos principales que indica la prescripción; para ello basta utilizar el mando encargado de girar el test hasta que marque la orientación en grados deseada, que viene dada por el eje de la fórmula esferocilíndrica.

Posteriormente, mediante la rueda de enfoque se desplaza el test hasta que la escala dióptrica marque como lectura la potencia resultante de sumar la esfera y el cilindro. Por último, se gira la lente hasta que aparezca enfocada la focal cuya orientación coincide con el eje del cilindro. En ese momento la lente queda orientada tal y como exige la prescripción. Debe tenerse en cuenta que el brazo de la cruz móvil del retículo siempre deberá pasar por el centro de cada una de las focales cuando estén siendo enfocadas, en ambas lecturas focométricas, ya que ésta es la condición necesaria para la localización exacta del centro óptico de la lente. La figura 5.31 muestra la orientación de una lente astigmática de potencia $(+1)(+1) 60^\circ$ mediante el enfoque de la focal correspondiente al meridiano de 150° .

Una vez se tiene la orientación correcta y la lente centrada, se presiona la palanca del marcador, con lo cual las tres patas marcarán tres puntos sobre la superficie convexa de la lente, que sirven para trazar la línea horizontal de referencia para el posterior montaje.

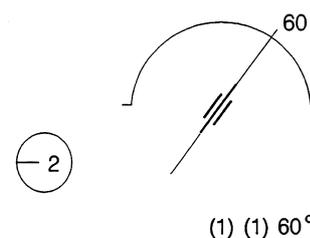


Fig. 5.31

Bibliografía

- FANNIN, T.E.; GROSVENOR T. *Clinical Optics*. Boston, Butterworths, 1987.
- ILLUECA, C.; DOMENECH, B. *Problemas de tecnología óptica*. Secretariado de publicaciones de la Universidad de Alicante, 1991.
- JALIE, M. *The Principles of Ophthalmic Lenses*. Londres, The Association of British Dispensing Opticians, 1988.
- LE GRAND, Y. *Optique Physiologique vol I*. París, Revue d'optique, 1964.
- SCHIKORRA A. «Lentes monofocales astigmáticas y prismáticas». *Ver y Oír* n^{os} 38 a 53, Puntex, 1989.
- SEGUÍ, M.M.; DOMÉNECH B. *Descripción y utilización del frontofocómetro*. Puntex, 1994.
- THIÉBAUT, TH. *Téchnologie lunetière*. París. Institut et Centre d'Optométrie, 1986.